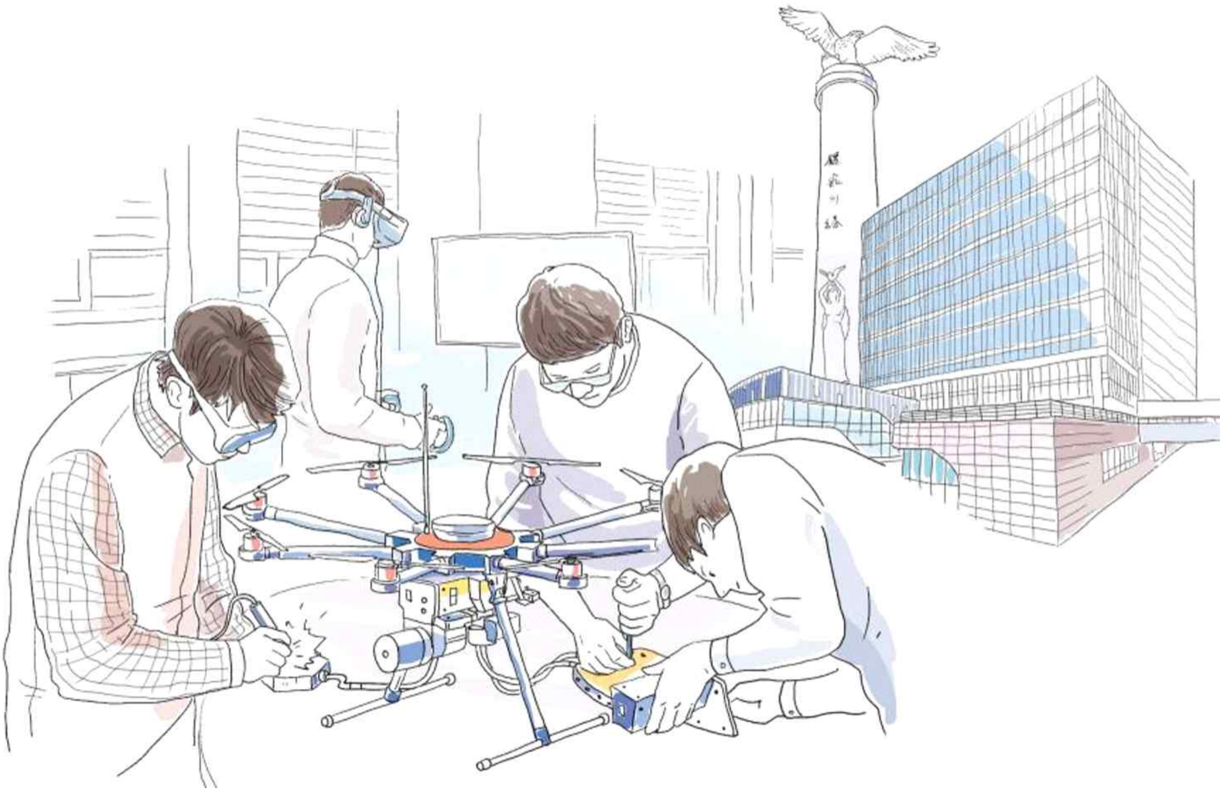
2025학년도 수시모집 논술고사
채점 기준 및 예시 답안
- 자연계 -



문항 번호	자연계 1번

• 출제 의도

본 문항에서는 수학의 기초가 되는 집합과 명제 단원의 내용을 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고 중요한 수학 활동 중 하나인 경우의 수를 주어진 상황에 맞게 논리적으로 구할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

[1-1] 주어진 조건을 만족하는 진리집합을 구성하여 정확하게 원소의 개수를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[1-2] 주어진 조건을 만족하는 경우의 수를 논리적으로 분석하여 순열과 조합을 사용하여 계산할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 주어진 표에서 조건에 해당하는 진리집합의 원소를 논리적인 방법으로 개수를 구하여 집합의 연산법칙을 활용하여 값을 계산하고 순열에서 주어진 상황에 맞게 합의 법칙으로 경우를 나누고 각각의 경우에 대한 결과를 순열과 조합을 활용하여 해결할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	진리집합 P의 원소의 개수를 구한다.	5
	진리집합 Q의 원소의 개수를 구한다.	5
	합집합 $P \cup Q$의 원소의 개수를 구한다.	5
[1-2]	수학 점수가 80점 이상인 학생이 총 3명임을 구한다.	2
	수학 점수가 80점 이상인 학생이 1명인 경우의 수를 구한다.	5
	수학 점수가 80점 이상인 학생이 2명인 경우의 수를 구한다.	5
	수학 점수가 80점 이상인 학생이 3명 이상인 경우의 수를 구한다.	2
	수학 점수가 80점 이상인 학생이 서로 이웃하지 않는 총 경우의 수를 구한다.	1

- **예시 답안**

[1-1]

6명의 수학 점수가 모두 다르므로 6명 중 임의로 뽑은 두 명을 A_i와 A_j라고 하면

(A_i의 수학 점수) $<$ (A_j의 수학 점수) 인 경우는 순서쌍 (j, i)가 조건 p를 참으로 하고,

(A_i의 수학 점수) $>$ (A_j의 수학 점수) 인 경우는 순서쌍 (i, j)가 조건 p를 참으로 한다.

따라서 6명 중 2명을 택하는 조합의 수와 진리집합 P의 원소의 개수는 같다. 즉, $n(P) = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$이다.

A_1과 A_4의 과학 점수만 같고 나머지의 과학 점수는 서로 다르므로 $U - \{(1,4), (4,1)\}$의 원소이면서 $i \neq j$인 (i, j)에 대하여

임의의 두 명을 A_i와 A_j라고 하면

(A_i의 과학 점수) $<$ (A_j의 과학 점수) 인 경우는 순서쌍 (i, j)가 조건 q를 참으로 하고,

(A_i의 과학 점수) $>$ (A_j의 과학 점수) 인 경우는 순서쌍 (j, i)가 조건 q를 참으로 한다.

따라서 6명 중 2명을 택하는 조합의 수에서 A_1과 A_4가 동시에 뽑히는 경우의 수를 제외한 값이 진리집합 Q의 원소의 개수이다. 즉, $n(Q) = {}_6\mathrm{C}_2 - 1 = 14$이다.

i가 하나로 고정 되었을 때 조건 p와 q를 모두 만족 시키는 j를 찾으면, 전체 집합의 원소 중 $P \cap Q$의 원소는 $(2,1)$, $(3,1)$, $(6,5)$임을 알 수 있다.

따라서 $n(P \cap Q) = 3$이고, $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q) = 15 + 14 - 3 = 26$이다.

[다른 풀이]

전체 집합 U는 총 36개의 원소를 가지고 있다. 이 중 조건 p를 참으로 하는 순서쌍을 선택하면

$i = 1$인 경우 모든 j에 대해서 조건 p는 거짓이다.

$i = 2$인 경우 $j = 1$일 때만 조건 p는 참이다.

$i = 3$인 경우 $j = 1, 2$일 때만 조건 p는 참이다.

$i = 4$인 경우 $j = 1, 2, 3$일 때만 조건 p는 참이다.

$i = 5$인 경우 $j = 1, 2, 3, 4$일 때만 조건 p는 참이다.

$i = 6$인 경우 $j = 1, 2, 3, 4, 5$일 때만 조건 p는 참이다.

그러므로 조건 p의 진리집합은

$P = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$

이고, $n(P) = 15$이다.

조건 q를 참으로 하는 순서쌍을 선택하면

$i=1$인 경우 $j=5,6$일 때만 조건 q는 참이다.

$i=2$인 경우 $j=1,3,4,5,6$일 때만 조건 q는 참이다.

$i=3$인 경우 $j=1,4,5,6$일 때만 조건 q는 참이다.

$i=4$인 경우 $j=5,6$일 때만 조건 q는 참이다.

$i=5$인 경우 모든 j에 대해서 조건 q는 거짓이다.

$i=6$인 경우 $j=5$일 때만 조건 q는 참이다.

그러므로 조건 q의 진리집합은

$Q=\{(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(6,5)\}$이고, $n(Q)=14$이다.

따라서,

$P\cap Q=\{(2,1),(3,1),(6,5)\}$이고,

$n(P\cup Q)=n(P)+n(Q)-n(P\cap Q)=15+14-3=26$ 이다.

[1-2]

6명 중 수학 점수가 80점 이상인 학생이 3명이고 80점 미만인 학생이 3명이다. (ⅰ) 수학 점수가 80점 이상인 학생이 0명 뽑히는 경우, (ⅱ) 수학 점수가 80점 이상인 학생이 1명 뽑히는 경우, (ⅲ) 수학 점수가 80점 이상인 학생이 2명 뽑히는 경우, (ⅳ) 수학 점수가 80점 이상인 학생이 3명 뽑히는 경우로 나누어 생각한다.

(ⅰ) 6명 중 4명을 뽑는다면 적어도 한 명은 수학 점수가 80점 이상이므로 수학 점수가 80점 이상인 학생이 한 명도 뽑히지 않는 경우의 수는 0이다.

(ⅱ) 뽑힌 4명 중 수학 점수가 80점 이상인 학생이 1명인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 이고, 각각의 경우에 대하여 수학 점수가 80점 이상인 학생이 이웃할 수 없으므로 4명을 자유롭게 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times 4! = 72$ 이다.

(ⅲ) 뽑힌 4명 중 수학 점수가 80점 미만인 학생 2명을 먼저 나열하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2 = 6$이고, 80점 이상인 학생 두 명을 뽑아 서로 이웃하지 않도록 이미 나열된 두 사람 옆자리에 한 명씩 나열하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{P}_2 = 3 \times 6 = 18$ 이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{P}_2 = 108$이다.

(ⅳ) 뽑힌 4명 중 수학 점수가 80점 이상인 학생이 3명인 경우는 이웃하지 않게 나열할 수 없으므로 경우의 수는 0이다.

따라서 구하는 총 경우의 수는 $0 + 72 + 108 + 0 = 180$이다.

[1-2-(ⅲ) 다른 풀이]

수학 점수가 80점 이상인 학생을 △로 표현하고 80점 미만인 학생을 □로 표현하면, △를 이웃하지 않게 나열하는 방법은 아래와 같이 3가지가 있다.

1. △ □ △ □
2. △ □ □ △
3. □ △ □ △

각각의 경우에 대하여 ${}_3\mathrm{P}_2 \times {}_3\mathrm{P}_2$이므로 구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2 \times {}_3\mathrm{P}_2 \times 3 = 108$이다.

문항 번호	자연계 2번

• 출제 의도

본 문항에서는 미적분의 핵심 개념인 연속, 미분, 적분에 관련된 개념들을 이해하고 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

[2-1] 주어진 범위에서 삼각함수와 $y=0$의 부정적분을 계산하고 그 특징을 이해한 다음 논리적인 방법을 통해 주어진 조건을 만족하는 연속함수를 구성 할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] [2-1]에서 구한 함수의 그래프의 개형을 이해하고 함수 $g(t)$의 정의를 정확히 이해하여 구성할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-3] [2-2]의 결과를 바탕으로 함수 $h(t)$를 정의하고 주어진 범위에 맞게 부분적분을 정확히 계산할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 각 구간에서 주어진 함수의 부정적분을 계산하고 함수의 연속성과 미분가능성을 기반으로 하여 주어진 조건을 만족하는 함수를 논리적으로 구성할 수 있는지를 평가한다. 이때, 미분가능성에 대한 논리적인 해석을 바탕으로 결과를 도출해야하며 그 결과에 대한 그래프의 개형을 정확히 그릴 수 있어야 한다. 정의역이 주어진 조건을 만족하는 최댓값으로 정의되는 함수를 정확하게 해석하여 함수를 구성해야 하며 이렇게 구성된 함수의 부분적분 계산을 정확히 계산할 수 있는지에 대해 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	구간별 $f'(x)$로부터 연속, 미분가능성, 조건 (가)-(다)의 의미를 생각해서 이를 만족하는 함수 $f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	5
	함수 $f(x)$의 식을 구할 수 있다.	5
[2-2]	t의 범위를 네 개의 구간으로 나누어 $f(x) \geq f(t)$인 x의 범위를 구할 수 있다.	12
	함수 $g(t)$의 식을 t의 구간을 나누어 정확히 나타낼 수 있다.	3
[2-3]	함수 $h(t)$의 식을 구할 수 있고, 정적분의 값을 구하기 위해 4개의 구간으로 나누어 나타낼 수 있다.	4
	부분적분 공식을 이용하여 네 개의 정적분의 값을 각각 계산할 수 있다.	6

• 예시 답안

[2-1]

여덟 개의 구간을 각각

$$I_1=\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right),\ I_2=\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right),\ I_3=\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4}\right),\ I_4=\left(\frac{3}{4}\pi,\ \pi\right)$$

$$I_5=\left(\pi,\ \frac{5\pi}{4}\right),\ I_6=\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2}\right),\ I_7=\left(\frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4}\right),\ I_8=\left(\frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right)$$

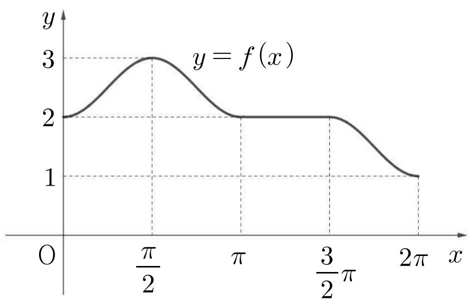
라 표현하자. 8개의 각 구간 I_k에서 $f'(x)=0$ 또는 $f'(x)=\sin 2x$이다. 따라서 8개의 각 구간 I_k에서 $f(x)$는 상수함수 또는 $f(x)$는 $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$ (단, C는 상수)의 형태이다.

즉, 8개의 각각의 구간에서 택할 수 있는 $f(x)$의 그래프 모양은 2가지이다.

그러므로

i) $f(0)=2$이고 $f(2\pi)=1$,
ii) 최댓값을 가지는 x의 값의 개수가 1이고,
iii) 미분가능

이 되도록 8개의 각각의 구간에서 2가지 중 한 가지를 택해서 $y=f(x)$의 그래프 모양을 완성하면 아래와 같다.



따라서

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cos(2x)+C_1 & (0\le x<\pi)\\ C_2 & \left(\pi\le x<\frac{3}{2}\pi\right)\\ -\frac{1}{2}\cos(2x)+C_3 & \left(\frac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi\right)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2, C_3는 적분상수) 이다.

여기서 함수 $f(x)$는 연속함수이고 $f(0)=2,\ f(2\pi)=1$을 만족하므로

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}+C_1=2 \\ -\frac{1}{2}+C_1=C_2 \\ -\frac{1}{2}+C_3=1 \end{cases}$$

이다.

그러므로 $C_1=\frac{5}{2}$, $C_2=2$, $C_3=\frac{3}{2}$이고, 결론적으로 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{5}{2} & (0\le x<\pi) \\ 2 & \left(\pi\le x<\frac{3}{2}\pi\right) \\ -\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{2} & \left(\frac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi\right) \end{cases}$$

이다.

<참고> $y=f(x)$의 그래프를 얻는 과정에서 생각할 요소

(i) 조건 (다)를 만족시키기 위해서는 최댓값은 반드시 $f(x)$가 $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$ 의 형태가 되는 구간에서 가져야 한다.

(ii) $y=-\frac{1}{2}\cos 2x+C\ (0\le x\le 2\pi)$가 극댓값을 가지는 x의 값은 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$이다.

(iii) $f(x)$가 $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$의 형태가 되는 구간의 내부에 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$ 둘 중 적어도 하나를 반드시 가져야 한다. 따라서 $I_2\cup I_3$에서 $f(x)$가 $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$의 형태이거나, 혹은 $I_6\cup I_7$에서 $f(x)$가 $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$의 형태이다.

(iv) 연속이고 미분가능이 되려면

ㄱ) I_1과 I_2에서 같은 형태의 그래프
ㄴ) I_3과 I_4에서 같은 형태의 그래프
ㄷ) I_5과 I_6에서 같은 형태의 그래프
ㄹ) I_7과 I_8에서 같은 형태의 그래프

가 되어야 한다.

(v) (i)-(iv)를 종합하면

구간 $(0,\pi)$에서 $f(x)$가 $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$의 형태 ………… ㉠

또는

구간 $(\pi,2\pi)$에서 $f(x)$가 $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$의 형태 ………… ㉡

이다. 최댓값을 가지는 x의 값의 개수가 1 이므로 ㉠과 ㉡이 동시에 성립해서는 안된다.

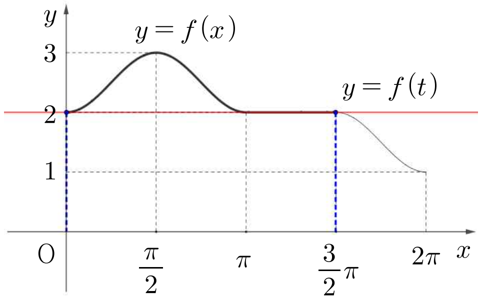
(vi) ㉠의 경우 구간 $(\pi,2\pi)$에서 미분가능하고, 이 구간의 $f(x)$의 최댓값은 구간 $(0,\pi)$에서 최댓값 보다 작아야 한다.
㉡의 경우 구간 $(0,\pi)$에서 미분가능하고, 이 구간의 $f(x)$의 최댓값은 구간 $(\pi,2\pi)$에서 최댓값 보다 작아야 한다.

(vii) (vi)를 만족하는 그래프 중 $f(0)=2$이고 $f(2\pi)=1$이 되는 그래프를 최종적으로 선택한다.

[2-2]

$0 \le t \le 2\pi$인 하나의 실수 t에 대하여 다음의 경우로 나누어 생각하자.

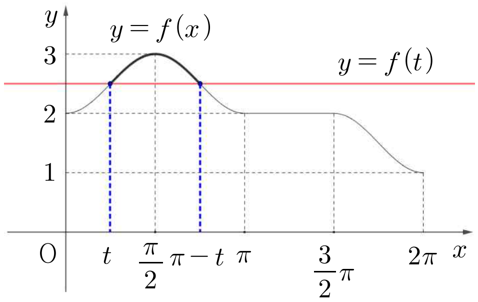
[경우 1] $t=0$ 또는 $\pi \le t \le \frac{3}{2}\pi$ 일 때를 생각하자. 이때 $f(t)=2$이다.



위의 그림과 같이 $f(x) \ge f(t)$인 x의 범위는 $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$이므로 x의 최댓값은 $\frac{3}{2}\pi$이다.

따라서 이 경우 $g(t)=\frac{3}{2}\pi \ \left(t=0 \text{ 또는 } \pi \le t \le \frac{3}{2}\pi\right)$이다.

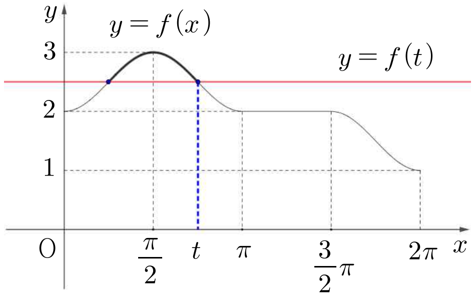
[경우 2] $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 일 때를 생각하자. 이때 $2 < f(t) \le 3$ 이다.



위의 그림과 같이 $f(x) \ge f(t)$인 x의 범위는 $t \le x \le \pi - t$ 이므로 x의 최댓값은 $\pi - t$이다.

따라서 이 경우 $g(t)=\pi - t \ \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$이다.

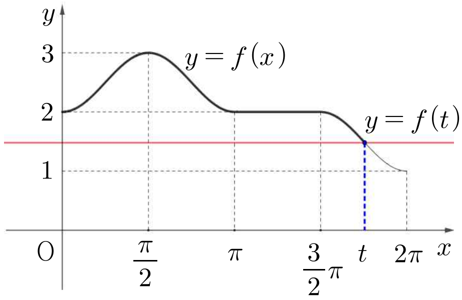
[경우 3] $\frac{\pi}{2} \le t < \pi$ 일 때를 생각하자. 이때 $2 < f(t) \le 3$ 이다.



위의 그림과 같이 $f(x) \geq f(t)$인 x의 범위는 $\pi - t \leq x \leq t$ 이므로 x의 최댓값은 t이다.

따라서 이 경우 $g(t)=t \ \left(\frac{\pi}{2} \leq t < \pi\right)$이다.

[경우 4] $\frac{3}{2}\pi < t \leq 2\pi$ 일 때를 생각하자. 이때 $1 \leq f(t) < 2$ 이다.



위의 그림과 같이 $f(x) \geq f(t)$인 x의 범위는 $0 \leq x \leq t$이므로 x의 최댓값은 t이다.

따라서 이 경우 $g(t)=t \ \left(\frac{3}{2}\pi < t \leq 2\pi\right)$ 이다.

그러므로 [경우1~4]를 정리하면

$$g(t)=\begin{cases} \frac{3}{2}\pi & \left(t=0 \text{ 또는 } \pi \leq t \leq \frac{3}{2}\pi\right) \\ t & \left(\frac{\pi}{2} \leq t < \pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < t \leq 2\pi\right) \\ \pi - t & \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

[2-3]

[2-2]의 결과에 의해 연속함수 $h(t)$는 다음과 같다.

$$h(t)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}\pi\sin t & \left(\pi \le t \le \dfrac{3}{2}\pi\right) \\ t\ \sin t & \left(\dfrac{\pi}{2} \le t < \pi \ \text{ 또는 }\ \dfrac{3}{2}\pi < t \le 2\pi\right) \\ (\pi - t)\sin t & \left(0 \le t < \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

따라서 $\int_0^{2\pi} h(t)\,dt$의 값을 아래와 같이 구간을 나누어서 구할 수 있다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi - t)\sin t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\sin t\,dt + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{3}{2}\pi\sin t\,dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} t\sin t\,dt$$

첫 번째 정적분의 값을 구하면,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi - t)\sin t\,dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt = \pi\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left\{\Big[-t\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\right\}$$

$$= \pi - \left\{(-0+0) + \Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\} = \pi - 1$$ 이므로

따라서 구하는 값은

$$\int_0^{2\pi} h(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi - t)\sin t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\sin t\,dt + \frac{3}{2}\pi\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin t\,dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} t\sin t\,dt$$

$$= \pi - 1 + \left\{\Big[-t\cos t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\,dt\right\} - \frac{3}{2}\pi\Big[\cos t\Big]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} + \Big[-t\cos t\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos t\,dt$$

$$= \pi - 1 + \left\{(\pi + 0) + \Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\} - \frac{3}{2}\pi + (-2\pi + 0) + \Big[\sin t\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$= 2(\pi - 1) - \frac{3}{2}\pi - 2\pi + 1 = -\frac{3}{2}\pi - 1$$

문항 번호	자연계 3번

• 출제 의도

본 문항에서는 벡터의 덧셈과 내적에 대한 기하적 의미를 알고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[3-1] 두 벡터의 덧셈에 대한 기하적 의미를 바탕으로 두 벡터를 더한 벡터의 종점들이 어떤 영역을 나타내는지 파악한 후 그 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[3-2] 두 벡터의 내적에 대한 기하적 의미를 바탕으로 두 벡터의 내적이 최대와 최소가 되는 상황을 각각 추론하여 두 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 두 벡터의 종점이 각각 주어진 도형 위를 움직이는 상황에서 두 벡터의 합을 나타내는 화살표의 종점이 어떻게 움직이고 두 벡터의 내적이 어떻게 달라지는지 추론할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

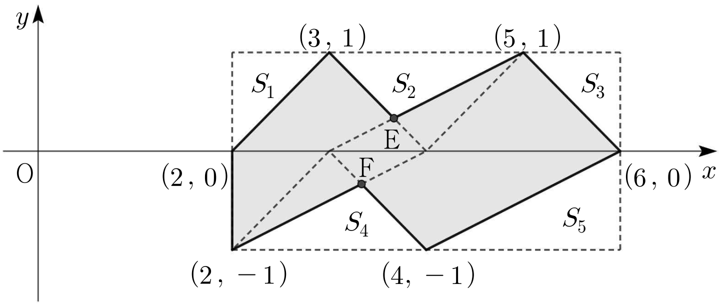
• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	점 R이 나타내는 영역을 구할 수 있다.	10
	점 R이 나타내는 영역의 넓이를 구할 수 있다.	5
[3-2]	$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OS}}$의 최댓값을 구하고 그 근거를 제시할 수 있다.	7
	$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OS}}$의 최솟값을 구하고 그 근거를 제시할 수 있다.	13

• 예시 답안

[3-1]

점 R이 나타내는 영역은 그림의 색칠된 부분과 같다.



두 직선 $y=-(x-4)$와 $y=\frac{1}{2}(x-3)$의 교점을 E, 두 직선 $y=\frac{1}{2}(x-2)-1$과 $y=-(x-3)$의 교점을 F라 하면 $\mathrm{E}\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{F}\left(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3}\right)$이다.

구하는 영역의 넓이는 위 그림의 바깥쪽 직사각형의 넓이에서 다섯 삼각형의 넓이 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 영역의 넓이는

$$4\times2-\frac{1}{2}\left(1\times1+2\times\frac{2}{3}+1\times1+2\times\frac{2}{3}+2\times1\right)=8-\frac{10}{3}=\frac{14}{3}$$

[3-2]

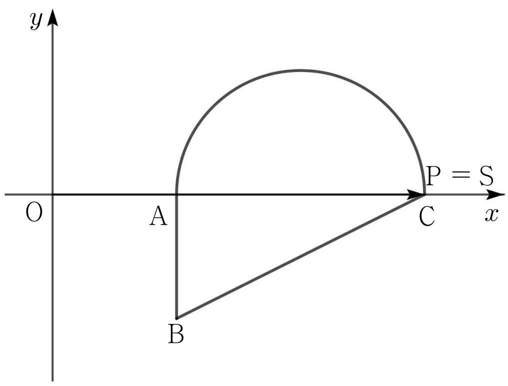
우선 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}$의 최댓값을 구하자.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$가 이루는 각을 θ라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OS}}|\cos\theta$이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}$의 최댓값은 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$와 $|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|$의 값이 최대이며, $\cos\theta=1$일 때이다.

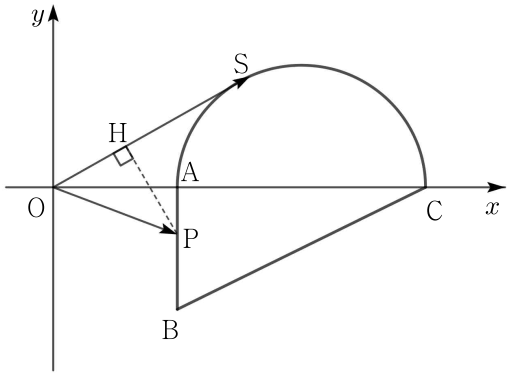
즉, 이러한 조건을 만족하는 점 P와 점 S가 모두 $(3, 0)$으로 존재하므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}$의 최댓값은 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OS}}|=3\times3=9$이다.

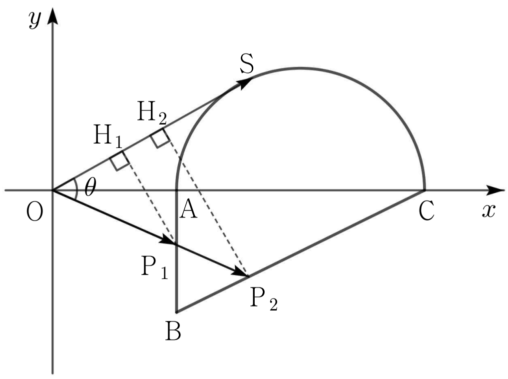


다음으로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}$의 최솟값을 구하자.

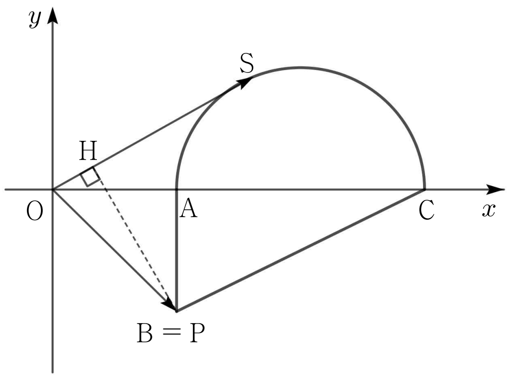
점 P 를 직선 OS 위에 내린 수선의 발을 H 라 하면,
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OS}} = |\overrightarrow{\mathrm{OS}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ 이다.



이때 임의의 점 S 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면, 점 P 는 선분 AB 또는 선분 BC 위에 존재한다.
이때 선분 AB 위에 있는 점을 P_1, 선분 BC 위에 있는 점을 P_2 라 하고, 각각의 점에 대하여 직선 OS 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하자.



$|\overrightarrow{\mathrm{OH}_1}| < |\overrightarrow{\mathrm{OH}_2}|$ 이므로 임의의 점 S 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OS}}$ 가 최소가 되기 위한 점 P 의 위치는 선분 AB 위에 있을 때이며 특히 점 P 는 점 B 와 같을 때 최소가 된다. …… ㉠



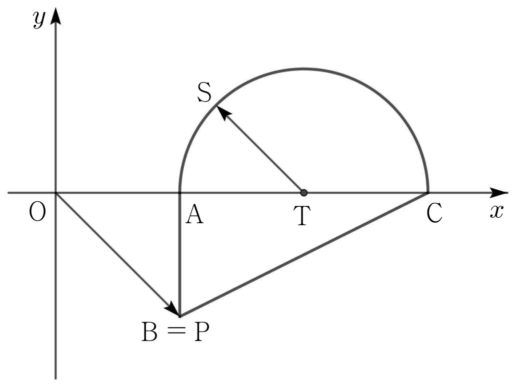
또한 두 점 A 와 C 의 중점을 T 라 하고, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{TS}}$ 가 이루는 각의 크기를 α 라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OS}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OT}} + \overrightarrow{\mathrm{TS}}) \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OT}}) + (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OT}}) + (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{TS}}\end{aligned}$$

$= 2 + 0 + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{TS}$

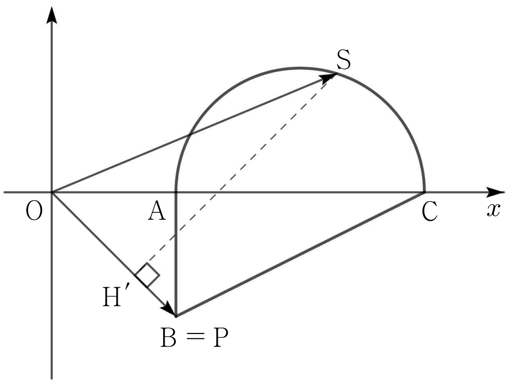
$= 2 + |\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{TS}|\cos\alpha$

$= 2 + |\overrightarrow{OB}|\cos\alpha$



이때 $\cos\alpha = -1$이 되도록 하는 점 S는 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 벡터 $\overrightarrow{TS}$의 방향이 반대인 경우로 존재하므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OS}$의 최솟값은 $2 + |\overrightarrow{OB}|\cos\alpha = 2 - \sqrt{2}$

[다른 풀이] ㉠ 이후의 풀이를 아래와 같이 할 수도 있다.



점 S에서 직선 OB에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OH'} + \overrightarrow{H'S}) = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OH'} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{H'S} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OH'} = |\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OH'}|$이므로

$|\overrightarrow{OH'}|$이 최소가 되어야 한다.

그러므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OS}$가 최소가 되는 점 H′은 함수 $y = \sqrt{1-(x-2)^2}$의 그래프에서 접선의 기울기가 1인 직선 l과 직선 OB의 교점이다.

직선 l의 방정식은 $y = (x-2) + \sqrt{2}$이고 직선 OB의 방정식인 $y = -x$와 연립하여 풀면

$x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이므로

$H'\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

그러므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OS}$의 최솟값은 $|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OH'}| = \sqrt{2} \times \sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2}$