[논술고사 이학계열 1번]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	이학계열(수학) / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II
	핵심개념 및 용어	복소수, 등비수열, 직선의 방정식, 합성함수, 이차방정식, 로그, 로그함수
예상 소요 시간	45분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

가) 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

나) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

다) 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라 하고, 곱하는 일정한 수를 공비라고 한다. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$r\neq 1\text{일 때, } S_n=a\frac{(1-r^n)}{1-r}$$

$$r=1\text{일 때, } S_n=na$$

라) 함수 $y=\sin x$는 주기가 2π인 주기 함수이다.

[문제 1-1] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 제시문 가)를 이용하여 다음이 성립함을 보이시오.

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

(2) 함수 $g(x)=(x^2+1)f(x)$에 대하여 $g'(1)$의 값을 구하시오. (단, $f(1)=2$, $f'(1)=1$)

[문제 1-2] 이차방정식 $4x^2-2x+1=0$의 두 근을 α, β라 하자. $a_n=\alpha^n+\beta^n$일 때, $\sum_{n=1}^{100}a_n$의 값을 구하시오.

[문제 1-3] $\frac{1}{32}\le x\le 1$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin\left(\pi\log_2 x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 모든 교점의 x좌표의 합을 구하시오.

[문제 1-4] 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$이 있다. $a_3=100$일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $1\le a\le 100$, $r>0$)

(1) $-(\log a)^3+(\log a_2)^2$을 a에 대한 식으로 나타내시오.

(2) (1)에서 구한 식을 $f(a)$라 할 때, 함수 $f(a)$의 최댓값을 구하시오.

3. 출제 의도

본 문항들은 미분, 수열, 로그와 삼각함수 등 여러 단원의 핵심 개념을 유기적으로 연결하여, 개별 공식을 적용하는 수준을 넘어 개념의 본질을 이해하고 이를 새로운 상황에 활용할 수 있는지를 종합적으로 평가하는 데 목적이 있다. 정의를 바탕으로 원리를 유도하고, 식의 구조를 분석하여 규칙성을 발견하며, 함수의 범위와 조건을 해석해 문제를 해결하는 과정을 통해 논리적 추론 능력과 대수적 조작 능력, 그리고 고차원적 사고력을 함께 확인하고자 한다.

첫째, 미분의 정의를 바탕으로 곱의 미분법을 스스로 유도할 수 있는지를 평가하여, 공식의 단순 암기가 아닌 개념적 이해 수준을 확인하고자 한다. 또한 극한의 성질과 함수의 연속성을 활용하여 식을 분리·정리하는 논리적 전개 능력과 서술형 풀이 과정을 점검하는 데 목적이 있다. 나아가 유도한 곱의 미분법을 구체적인 함수에 적용하여 도함수 값을 계산함으로써, 개념 이해와 계산 능력을 종합적으로 평가하고자 한다.

둘째, 본 문항은 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 근의 거듭제곱의 합을 효과적으로 계산할 수 있는지를 평가하고자 한다. 특히 $a_n=\alpha^n+\beta^n$의 구조를 파악하고, 대수적 조작과 식의 변형을 통해 수열의 규칙성이나 순환 관계를 발견하여 복잡한 합을 단순화하는 추론 능력을 평가한다. 또한 단순 계산이 아니라 식의 구조를 분석하고 패턴을 일반화하는 과정에서 고차원적 사고력과 문제 해결 전략의 적절성을 종합적으로 확인하는 데 목적이 있다.

셋째, 이 문항은 로그함수와 삼각함수가 합성된 함수의 구조를 이해하고, 정의역을 활용하여 식을 적절히 변형한 뒤 삼각방정식을 해결할 수 있는지를 평가하고자 한다. 특히 $\log_2 x$의 범위를 먼저 파악하여 삼각함수의 각의 범위를 제한하고, 이에 따라 해를 빠짐없이 구하는 논리적 추론 능력을 확인하는 데 목적이 있다. 또한 합성함수의 해석, 치환을 통한 방정식 풀이, 그리고 구한 해들의 합을 계산하는 종합적 문제 해결 능력을 평가한다.

끝으로 이 문항은 등비수열의 기본 성질을 활용하여 항 사이의 관계를 식으로 정리할 수 있는지를 평가하고, 이를 로그의 성질과 연결하여 하나의 변수에 대한 식으로 표현하는 능력을 확인하고자 한다. 특히 수열 조건을 로그식으로 변환하고 정리하는 과정에서 대수적 조작 능력과 개념 간 연결 능력을 평가한다. 또한 치환을 통해 함수를 새롭게 설정하고, 미분을 이용하여 최댓값을 구하도록 구성함으로써 함수의 최댓값을 구하는 종합적 문제 해결 능력을 확인하는 데 목적이 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ01-02] 삼각함수의 주기와 그래프의 성질을 이해한다.
문제 1-1	[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.
문제 1-2	[10수학01-06] 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다. [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
문제 1-3	[12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅱ01-02] 삼각함수의 그래프의 성질을 이해하고 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ01-03] 삼각방정식을 풀 수 있다.
문제 1-4	[12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	배종숙 외	금성출판사	2020	20-22 33-36 54-58 78-82
	수학	황선욱 외	미래엔	2020	13-20 34-37 83-85 128-138 175-183
	수학Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2020	121-138
	수학	김원경 외	비상	2020	11-19 30-32 112-122 159-173
	수학Ⅰ	김원경 외	비상	2020	117-133
	수학	이준열 외	천재교육	2020	10–20 31–36 133–136 172–181
	수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2020	120-137
	수학	권오남 외	교학사	2020	11-15 29-33 124-126 163-179
	수학Ⅰ	권오남 외	교학사	2020	116-132
기타					

5. 문항 해설

[문제1-1]
미분의 정의를 바탕으로 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 가 성립함을 증명하고, 이를 활용하여 $g(x) = (x^2+1)f(x)$의 도함수 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[문제 1-2]
이 문제는 근과 계수의 관계를 이용하여 거듭제곱의 합을 체계적으로 정리하고, 수열의 구조적 규칙성을 발견하여 복잡한 합을 단순화하는 사고 과정을 요구하는 문제이다.

[문제 1-3]
이 문항은 로그함수와 삼각함수가 합성된 함수의 구조를 이해하고, 정의역을 활용하여 문제를 단계적으로 해결할 수 있는지를 평가한다. 먼저 로그값의 범위를 구한 뒤 이를 이용해 삼각함수의 해를 제한된 구간에서 찾도록 구성되어 있다. 이후 구한 해를 다시 원래 변수로 환원하고, 모든 교점의 좌표를 정리하도록 하여 합성함수 해석과 삼각방정식 해결 능력을 종합적으로 확인하는 문제이다.

[문제 1-4]
(1) 등비수열에서 첫째항과 공비의 관계를 이용하면 셋째항을 첫째항에 대한 식으로 나타낼 수 있다. 주어진 조건을 활용하여 공비를 로그를 이용해 정리하면, 전체 식을 하나의 변수에 대한 식으로 표현할 수 있다. 즉, 수열의 조건을 대수적으로 정리하여 하나의 함수 형태로 바꾸는 과정이 핵심이다.

(2) (1)에서 얻은 식을 하나의 함수로 두고, 로그값을 새로운 변수로 치환하여 생각하면 정의역을 명확히 설정할 수 있다. 이후 함수의 증감 관계를 분석하여 최댓값이 되는 지점을 찾고, 해당 값을 계산하면 된다. 이 과정은 치환, 함수 해석, 최댓값 판별을 종합적으로 활용하는 문제 해결 과정이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
1-1 (1)	미분의 정의를 쓰고, 중간항을 더하고 빼어 두 항으로 분리하는 전개 과정(네모 안 식)이 모두 제시된 경우	7.7
	네모 안의 식이 1개 누락된 경우	5.7
	네모 안의 식이 2개 누락된 경우	3.7
	네모 안의 식이 3개 누락된 경우	1.7
	네모 안의 식이 전혀 제시되지 않은 경우	3
1-1 (2)	곱의 미분법을 정확히 적용하여 도함수를 구하고, 값을 올바르게 계산한 경우	3.3
	풀이 과정은 불완전하거나 이해하기 어려우나 최종 답이 맞는 경우	1.3
	풀이 과정 중 계산 실수가 있으나 풀이의 방향이 타당한 경우	1.3
1-2	답과 풀이 과정이 모두 맞는 경우	13
	풀이 과정은 이해하기 어렵거나 불완전하나 최종 답이 맞는 경우	6
	풀이 과정 중 마지막에 간단한 계산 실수가 있는 경우	9
1-3	정의역을 이용하여 각의 범위를 올바르게 설정하고, 삼각방정식을 정확히 풀어 모든 해를 구한 뒤, 교점의 x 좌표의 합을 정확히 구한 경우	13
	6개의 해 중 하나를 틀릴 때마다 감점	-2
1-4 (1)	등비수열의 조건을 이용하여 공비를 로그식으로 정확히 정리하고, 식을 a에 대한 식으로 올바르게 나타낸 경우	5
	풀이 과정은 타당하나 마지막에 간단한 계산 실수가 있는 경우	3.5
1-4 (2)	치환 후 정의역을 설정하고, 미분을 이용하여 증감표를 작성하여 최댓값을 정확히 구한 경우	8
	증감표를 작성하지 않은 경우	7
	풀이 과정은 타당하나 마지막에 간단한 계산 실수가 있는 경우	6

7. 예시 답안 혹은 정답

[답안 1-1](11점)

(1) (7.7점)

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)\boxed{-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$= \boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)}{h}} + \boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}}{h}\times\lim_{h\to 0}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$= \boxed{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$$

별해 (두번째 줄)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)\boxed{-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)}-f(x)g(x)}{h}$$

채점기준

- 네모 안의 표현이 모두 있는 경우: 7.7
- 네모 안의 표현이 1개 빠진 경우: 5.7
- 네모 안의 표현이 2개 빠진 경우: 3.7
- 네모 안의 표현이 3개 빠진 경우: 1.7
- 네모 안의 표현이 하나도 없는 경우: 0

(2) (3.3점)

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\{(x^2+1)f(x)\}$$

$$= \{(x^2+1)f(x)\}' = \{(x^2+1)\}'f(x)+\{(x^2+1)\}f'(x) = 2xf(x)+\{(x^2+1)\}f'(x)$$

$$g'(1) = (2\times 1)f(1)+(1^2+1)f'(1) = 2f(1)+2f'(1) = 6$$

답 6

채점기준

- 답과 풀이 과정이 모두 맞는 경우: 3.3

- 이해할 수 없는 과정과 답만 맞은 경우: 1.3
- 풀이과정 중에 실수가 있는 경우: 1.3

[답안 1−2] (13점)

근과 계수와의 관계에 따라서 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=\frac{1}{4}$ 이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$이다.

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

$(2x+1)(4x^2-2x+1)=0$이므로 $x^3=-\frac{1}{8}$

$a_1+a_2+a_3=0$이고, $a_4+a_5+a_6=-\frac{1}{8}(a_1+a_2+a_3)$이고

자연수 n에 대하여 $a_{3n+1}+a_{3n+2}+a_{3n+3}=-\frac{1}{8}(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$ 이므로

$\sum_{n=1}^{100}a_n=a_{100}=\alpha^{100}+\beta^{100}=(\alpha^{33})^3\alpha+(\beta^{33})^3\beta=(\alpha^3)^{33}(\alpha+\beta)=(-\frac{1}{8})^{33}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2^{100}}$

답 $-\frac{1}{2^{100}}$

아래의 별해 모두 정답 처리

1) 각 α, β 의 복소수값을 구해서 패턴을 찾아 푼 경우

2) 기타 납득할 만한 방법으로 푼 경우

채점기준

- 답과 풀이 과정이 모두 맞는 경우: 13
- 이해할 수 없는 과정과 답만 맞은 경우: 6
- 풀이과정 중에 마지막에 간단한 계산 실수가 있는 경우: 9

[답안 1−3] (13점)

$\frac{1}{32}\le x\le 1$ 이므로 $-5\le \log_2 x\le 0$ 즉, $\frac{-19\pi}{4}\le \pi\log_2 x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}$

$\sin(\pi\log_2 x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi\log_2 x+\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{3}{4}\pi}$ 또는 $\pi\log_2 x+\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{1}{4}\pi,}$

$\pi\log_2 x+\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{11}{4}\pi}$ 또는 $\pi\log_2 x+\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{9}{4}\pi}$

$\pi\log_2 x+\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{19}{4}\pi}$ 또는 $\pi\log_2 x+\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{17}{4}\pi}$

따라서 x는

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{1}{8}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{8}$

$x=\frac{1}{32}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{32}$ 이므로

답 $\frac{21}{32}(1+\sqrt{2})$

아래의 별해 모두 정답 처리

1) 일반해를 구한 후 값을 구한 경우

2) 기타 납득할 만한 방법으로 푼 경우

채점기준

- 답과 풀이 과정이 모두 맞는 경우: 13
- 위 6개 중 하나 틀릴 때 마다: -2

[답안 1-4] (13점)

(1) (5점)

$a_1=a$

$a_3=ar^2=100$

$\log ar^2=\log 100$

$\log a+\ 2\log r=2$ 이므로

$\log r=\frac{2-\log a}{2}$

(1) 번 답 $-(\log a)^3+(\log a+\frac{2-\log a}{2})^2$ 또는 $-(\log a)^3+(1+\frac{\log a}{2})^2$

채점기준

- 답과 풀이 과정이 모두 맞는 경우: 5
- 풀이과정 중 마지막에 간단한 계산 실수가 있는 경우: 3.5

(2) (8점)

$t=\log a$ 라 하면, $g(t)=-t^3+(t+\frac{2-t}{2})^2=-t^3+(1+\frac{t}{2})^2$ $(0 \le t \le 2)$

$g'(t)=-3t^2+\frac{1}{2}t+1=0$, 즉 $t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$. 이므로 $t=\frac{2}{3}$

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{40}{27}$	$\searrow$	-4

이므로 $t=\frac{2}{3}$에서 최댓값이다.

(2) 번 답 $\frac{40}{27}$

채점기준

- 답과 풀이 과정이 모두 맞는 경우: 8
- 증감표 없는 경우: -1
- 풀이과정 중 마지막에 간단한 실수가 있는 경우: 6

[논술고사 이학계열 2번]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">이학계열(수학) / 문제2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학 I, 수학 II</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>이차방정식의 판별식 및 근과 계수의 관계, 등차수열, 극댓값, 극솟값, 기울기, 극한, 정적분</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">45분 / 90분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

【문제 2】 (50점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 대한 풀이 과정과 답을 제시하시오.(답만 기재하면 0점 처리)

가) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, (a, b)의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 $[a, b]$에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 $[a, b]$에서 감소한다.

나) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라고 하면 $f(x)$의 a부터 b까지의 정적분은

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

다) 함수의 극한의 성질

$\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$ (L, M은 실수)일 때,

(1) $\lim_{x \to a} cf(x) = cL$ (c는 상수)

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = L + M$

(3) $\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = L - M$

(4) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$

(5) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ $(M \neq 0)$

※ 함수의 극한의 성질은 $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때도 성립한다.

[문제 2-1] 함수 $f(x) = x|(x-1)(x+1)|$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 제시문 가)를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하시오.

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2일 때, 실수 k의 값을 모두 구하시오.

[문제 2-2] $-3 \le x \le 1$에서 정의된 함수 $f(x)=ax^2-2(a^2+1)x+2a^2-a+3$ (a는 실수)에 대하여 다음 물음에 답하시오.

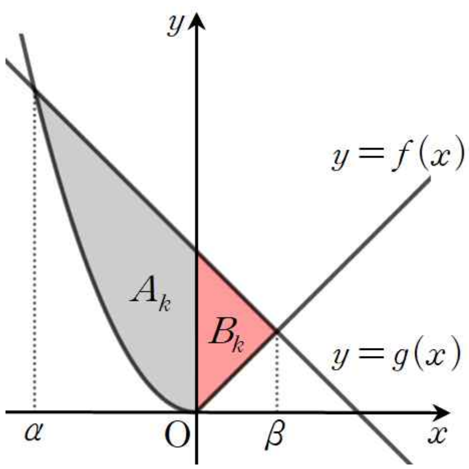
(1) $s>0$, $t>0$일 때, 부등식 $\dfrac{s+t}{2} \ge \sqrt{st}$가 성립함을 보이시오.

(2) (1)의 부등식을 이용하여 실수 a의 값에 관계없이 함수 $f(x)$의 최솟값이 일정함을 보이시오.

[문제 2-3] 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=-4x^3+\left\{\dfrac{3}{2}x\displaystyle\int_0^1 tf'(t)dt\right\}^2-2x+\displaystyle\int_0^2 f(t)dt$가 성립할 때, 함수 $f(x)$를 모두 구하시오.

[문제 2-4] 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x \ge 0) \\ x^2 & (x<0) \end{cases}$과 함수 $g(x)=-kx+2k^2$ ($k>0$)이 있다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 두 교점의 x좌표는 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$이고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 영역은 y축에 의해 그림과 같이 A_k와 B_k의 두 부분으로 나뉜다. 다음 물음에 답하시오.



(1) 도형 A_k의 넓이를 $S(k)$, 도형 B_k의 넓이를 $T(k)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{S(k)}{T(k)}$의 값을 구하시오.

(2) $k=1$일 때, 점 $(\alpha, f(\alpha))$를 지나고 도형 B_1의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 구하시오.

3. 출제 의도

함수는 여러 가지 변화 현상을 포함한 다양한 대응관계를 나타내는 수학의 핵심 개념이며, 이러한 관계를 좌표평면 위에 시각적으로 표현한 함수의 그래프를 통해 함수의 성질을 더욱 명확하게 이해할 수 있다. 함수는 다양한 자연 및 사회현상에서 대상 간의 연관성이나 종속성을 해석하고 변화를 예측하는 수단이 된다. 특히 다양한 변화 현상을 수학적으로 이해하고 모델링하여 분석하는 과정을 통해 복잡한 현상을 이해하고 실제 문제에 적용하고 해결하는 데 도움이 된다.

다항식의 연산, 방정식과 부등식에 대한 이해를 바탕으로 미분과 적분을 활용하여 다항함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 등의 문제를 해결할 수 있다. 본 문항은 함수와 함수의 그래프에 대한 체계적인 이해를 바탕으로, 다양한 수학적 개념을 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가하고자 한다.

2-1. 절댓값 기호를 포함한 함수의 식을 구간에 따라 나누어 정의할 수 있는지 평가한다. 또한, 도함수를 활용하여 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 이를 통해 함수와 직선의 위치 관계를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

2-2. 절대부등식을 증명하고, 이를 이차함수의 최대, 최소 개념과 결합하는 능력을 평가한다.

2-3. 항등식의 성질을 이해하고, 이를 다항함수의 미분법과 정적분의 관계에 활용하여 다항함수를 구한다.

2-4. 직선의 방정식과 함수의 그래프를 이해하고, 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 활용하여 구할 수 있는지 평가한다. 또한, 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 극한값을 구하고 직선의 방정식을 활용하는 능력을 묻는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
제시문	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
문제 2-1 (1)	[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문제 2-1 (2)	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 2-2 (1)	[10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
문제 2-2 (2)	[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문제 2-3	[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
문제 2-4 (1)	[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
문제 2-4 (2)	[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외	신사고	2020	22-23, 64-67, 119-121, 195-197, 209-211
	수학Ⅱ	고성은 외	신사고	2020	19-22, 63-66, 80-91, 119-122, 136-137
	수학	권오남 외	교학사	2020	22-23, 65-67, 116-119, 198-200, 211-215
	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2020	21-24, 68-74, 88-102, 130-133, 146-148
	수학	김원경 외	비상	2020	24-26, 63-66, 112-115, 191-192, 203-206
	수학Ⅱ	김원경 외	비상	2020	18-22, 61-64, 78-92, 112-118, 129-131
	수학	박교식 외	동아출판	2020	17-18, 64-67, 113-116, 198-200, 211-214
	수학Ⅱ	박교식 외	동아출판	2020	19-23, 64-67, 81-95, 123-125, 141-142
	수학	홍성복 외	지학사	2020	25-27, 73-75, 127-130, 206-207, 219-222
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	20-24, 65-69, 83-98, 125-128, 144-146
	수학	황선욱 외	미래엔	2020	26-27, 75-78, 124-127, 204-206, 219-221
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2020	18-22, 63-66, 82-97, 122-126, 139-141

5. 문항 해설

본 문제에서는 함수와 함수의 그래프를 이해하고 활용하는 역량을 평가하고자 한다. 다항함수의 미분과 적분을 활용하여 함수에 대해 알아보고, 절대부등식, 항등식, 극한 등의 내용을 활용하여 문제를 해결하는 종합적인 문제해결 능력을 평가하고자 한다.

[문제 2-1]

함수의 그래프에 대한 이해를 바탕으로 절댓값을 포함한 함수를 구간에 따라 나눌 수 있으며, 미분을 활용하여 그래프의 개형 또는 증감표를 구하고 이를 해석하여 증가하는 구간과 감소하는 구간을 묻는 문제이다.

또한, 제시된 함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 활용하여 함수의 그래프와 직선이 두 점에서 만날 함숫값 및 상수의 조건을 묻는 문제이다.

[문제 2-2]

간단한 절대부등식의 증명을 바탕으로 함수의 그래프를 활용하여 이차함수의 최솟값을 보이는 문제이다.

[문제 2-3]

항등식에 대한 이해를 기반으로 미분과 정적분을 활용하여 다항함수의 차수와 계수를 구하고, 주어진 다항함수를 구하는 문제이다.

[문제 2-4]

함수에 대한 이해를 바탕으로 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분 등을 활용하여 구하고, 이를 극한에 활용하는 문제이다. 또한, 직선의 방정식에 대한 이해를 묻는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
2-1	(1) 절댓값을 이해하고, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. - 절댓값을 포함한 함수의 그래프를 이해하여 구간에 따라 나눌 수 있다. 또한 미분을 활용하여 그래프의 개형 또는 증감표를 통해 증가하는 구간과 감소하는 구간을 구하면 (9점)	9
	(2) 주어진 함수의 그래프와 직선이 만나는 점의 개수가 2개인 경우를 구할 수 있다. - 미분을 활용하여 그래프의 개형 또는 증감표를 통해 주어진 함수의 그래프와 직선이 만나는 점의 개수가 2개인 k의 값을 구하면 (3점)	3
2-2	(1) 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. - 주어진 절대부등식을 논리적으로 오류가 없이 증명하면 (3점)	3
	(2) 함수의 그래프를 이해하고, 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. - 일차함수일 때, 최솟값이 일정함을 보이면 (2점) - (1)을 이용하여 $a > 0$일 때 최솟값이 일정함을 보이면 (4점) - (1)을 이용하여 $a < 0$일 때 최솟값이 일정함을 보이면 (4점)	10
2-3	항등식의 성질과 미분, 정적분을 이용하여 다항함수를 구할 수 있다. - 항등식의 성질을 이용하여 다항함수로 표현하면 (3점) - 항등식의 성질에 대한 이해를 바탕으로 다항함수의 미분과 정적분을 이용하여 다항함수를 구하면 (9점)	12
2-4	(1) 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. - 정적분을 이용하여 도형 A_k의 넓이를 구하면 (3점) - 도형 B_k의 넓이를 구하면(2점) - 함수의 극한값을 구하면 (2점)	7
	(2) 직선의 방정식을 활용하여 주어진 조건에 알맞는 직선의 기울기를 구할 수 있다. - 도형의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 구하면 (6점)	6

7. 예시 답안 혹은 정답

[답안 2-1] (12점)

풀이) (1) **(9점)**

$x<-1$, $-1 \le x < 1$, $x \ge 1$의 구간으로 나누어 증가하는 구간과 감소하는 구간을 찾을 수 있다.

i) $x<-1$**일 때,**

$f(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$이므로 $f'(x)=3x^2-1=3\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$이다.

이때 $x<-1$의 구간에서 $f'(x)>0$.

x	$\cdots$	-1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	↗	(0)

--[2점]

ii) $-1 \le x < 1$**일 때,**

$f(x)=-x(x-1)(x+1)=-x^3+x$이므로 $f'(x)=-3x^2+1=-3\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$이다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	(0)

--[2점]

iii) $x \ge 1$**일 때,**

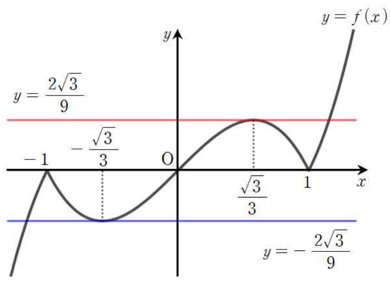
$f(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$이므로 $f'(x)=3x^2-1=3\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$이다.

이때 $x \ge 1$의 구간에서 $f'(x)>0$.

x	1	$\cdots$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	↗

--[2점]

따라서 증가하는 구간은 $(-\infty,-1]$, $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, $[1,\infty)$이고, 감소하는 구간은 $\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$이다. --------[3점]



◆ **증감표 대신 그래프 그린 경우 인정**

(2) **(3점)**

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=k$와 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수가 2이므로 $k=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$이다.

---------------[3점]

[답안 2-2] (13점)

풀이) (1) **(3점)**

$s>0,\ t>0$일 때, $\dfrac{s+t}{2}-\sqrt{st}=\dfrac{(\sqrt{s})^2-2\sqrt{st}+(\sqrt{t})^2}{2}=\dfrac{(\sqrt{s}-\sqrt{t})^2}{2}\geq 0$이다.

따라서 $\dfrac{s+t}{2}\geq\sqrt{st}$가 성립한다. ---**[3점]**

<다른 풀이> 기타 논리적으로 오류가 없는 경우 인정

(2) **(10점)**

ⅰ) $a=0$**일 때,** $y=-2x+3$은 $-3\leq x\leq 1$에서 감소하므로 $x=1$에서 최솟값 1.---------**[2점]**

ⅱ) $a>0$**일 때,**

$y=a\left(x-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\right)^2-\dfrac{(a^2+1)^2}{a}+2a^2-a+3$이므로 꼭짓점의 x좌표는 $a+\dfrac{1}{a}$.

$a>0$이고 $\dfrac{1}{a}>0$이므로 (1)에 의해 $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$이다.

즉, 꼭짓점의 x좌표가 2보다 크거나 같으므로 아래로 볼록인 이차함수 $f(x)$는 $-3\leq x\leq 1$의 범위에서 꼭짓점의 x좌표에서 가장 가까이 있는 $x=1$에서 최솟값을 갖고, 이때 최솟값은 $f(1)=1$이다.

------------------------**[4점]**

ⅲ) $a<0$**일 때,**

$y=a\left(x-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\right)^2-\dfrac{(a^2+1)^2}{a}+2a^2-a+3$이므로 꼭짓점의 x좌표는 $a+\dfrac{1}{a}$.

$b=-a$라 하면, $b>0$이고 $\dfrac{1}{b}>0$이므로 (1)에 의해 $b+\dfrac{1}{b}\geq 2$이다.

따라서 $a+\dfrac{1}{a}=-\left(b+\dfrac{1}{b}\right)\leq -2$이므로 꼭짓점의 x좌표가 -2보다 작거나 같다.

꼭짓점의 x좌표가 -2보다 작거나 같으므로 위로 볼록인 이차함수 $f(x)$는 $-3\leq x\leq 1$의 범위에서 꼭짓점의 x좌표에서 가장 멀리 있는 $x=1$에서 최솟값을 갖고, 이때 최솟값은 $f(1)=1$이다.

--**[4점]**

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 최솟값은 1로 일정하다.

- (1)을 활용하고 그래프 등 기타 논리적으로 오류가 없는 경우 인정

[답안 2-3] (12점)

풀이) $a=\left(\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^1 tf'(t)dt\right)^2$이고 $b=\displaystyle\int_0^2 f(t)dt$라 하면 $f(x)=-4x^3+ax^2-2x+b$이다.

---**[3점]**

$f'(x)=-12x^2+2ax-2$이다.

$$a=\left(\frac{3}{2}\int_0^1 tf'(t)dt\right)^2=\left(\frac{3}{2}\int_0^1(-12t^3+2at^2-2t)dt\right)^2=\left(\frac{3}{2}\left[-3t^4+\frac{2a}{3}t^3-t^2\right]_0^1\right)^2=(a-6)^2$$

이 식을 정리하면 $a^2-13a+36=0$이므로 $a=4$ 또는 $a=9$.

---**[4점]**

이때, $b=\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(-4t^3+at^2-2t+b)dt=-20+\frac{8}{3}a+2b$이므로, $b=20-\dfrac{8}{3}a$.

---**[3점]**

따라서 $a=4$일 때, $b=\dfrac{28}{3}$ 또는 $a=9$일 때 $b=-4$이다.

그러므로 $f(x) = -4x^3 + 4x^2 - 2x + \dfrac{28}{3}$ 또는 $f(x) = -4x^3 + 9x^2 - 2x - 4$이다.

--**[2점]**

<다른 풀이 예시> $f'(x) = -12x^2 + \dfrac{9}{2}x\left(\int_0^1 tf'(t)dt\right)^2 - 2 = -12x^2 + ax - 2$**라 하자.**

--**[3점]**

$a = \dfrac{9}{2}\left(\int_0^1 tf'(t)dt\right)^2 = \dfrac{9}{2}\left(\int_0^1 (-12t^3 + at^2 - 2t)dt\right)^2 = \dfrac{9}{2}\left(-4 + \dfrac{a}{3}\right)^2$

$a = 18$ 또는 $a = 8$

--**[4점]**

$f(x)$의 상수항을 b라 하면, $f(x) = -4x^3 + \dfrac{a}{2}x^2 - 2x + b$이다. 따라서

$b = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 \left(-4t^3 + \dfrac{a}{2}t^2 - 2t + b\right)dt = -20 + \dfrac{4}{3}a + 2b$이므로, $b = 20 - \dfrac{4}{3}a$.

--**[3점]**

따라서 $a = \dfrac{9}{2}$일 때, $b = \dfrac{28}{3}$ 또는 $a = 8$일 때 $b = -4$이다.

그러므로 $f(x) = -4x^3 + 4x^2 - 2x + \dfrac{28}{3}$ 또는 $f(x) = -4x^3 + 9x^2 - 2x - 4$이다.

--**[2점]**

[문제 2-4] (13점)

풀이) (1) **(7점)**

$x < 0$일 때, $y = x^2$과 $y = -kx + 2k^2$의 교점의 x좌표는 $x = -2k$이다. 따라서

A_k의 넓이를 구하면 $S(k) = \int_{-2k}^0 (-x^2 - kx + 2k^2)dx = \dfrac{10}{3}k^3$이다.

--**[3점]**

$x > 0$일 때, $y = x$와 $y = -kx + 2k^2$의 교점의 x좌표는 $x = \dfrac{2k^2}{k+1}$이다. B_k는 y절편이 밑변이고 높이가 교점의 x좌표인 삼각형의 넓이이므로 $T(k) = \dfrac{2k^4}{k+1}$이다.---①

--**[2점]**

따라서 $\lim_{k \to \infty} \dfrac{S(k)}{T(k)} = \lim_{k \to \infty} \left(\dfrac{10}{3}k^3 \times \dfrac{k+1}{2k^4}\right) = \lim_{k \to \infty} \dfrac{5(k+1)}{3k} = \dfrac{5}{3}$이다.

--**[2점]**

(2) **(6점)**

$k = 1$일 때 $a = -2$이므로, 점 $(-2, 4)$를 지나고 B_1의 넓이를 이등분하는 직선을 l이라 하자.

직선 l의 기울기를 m이라 할 때 직선의 방정식은 $y - 4 = m(x+2)$ --- ①

직선 l과 $y = x$의 교점은 ①에 $y = x$를 대입하여 $x - 4 = m(x+2)$이므로 교점의 x좌표는 $x = \dfrac{2m+4}{1-m}$---②

$k=1$일 때 B_1의 넓이는 1이므로 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(2m+4)\times\frac{2m+4}{1-m}$이다. 이를 정리하면

$4m^2+17m+15=0$이다. 이때 $m=-3$, $m=-\frac{5}{4}$.

---[4점]

그런데 이 직선의 기울기는 $-2<m<-1$이므로, 직선 l의 기울기는 $m=-\frac{5}{4}$이다.

---[2점]

<다른 풀이 예시> 직선을 $y=mx+b$라 하자.

$(-2,4)$를 지나므로 $4=-2m+b$이고 $y=x$와 교점의 x좌표는 $x=\frac{b}{1+m}$이다. ----①

B_1넓이의 절반인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}=\frac{b^2}{1+m}\times\frac{1}{2}$--------②

②에 ①을 대입하여 정리하면 $4m^2+17m+15=0$이므로 $m=-3$, $m=-\frac{5}{4}$

---[4점]

그런데 이 직선의 기울기는 $-2<m<-1$이므로, 직선 l의 기울기는 $m=-\frac{5}{4}$이다.

---[2점]