[논술고사 공학계열 1번]

1. 일반 정보

유형		☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사
전형명		논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		공학계열(수학) / 문제1
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	다항함수, 삼각함수, 미분법, 적분법
예상 소요 시간		45분 / 90분

2. 문항 및 제시문

【문제 1】 (50점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 대한 풀이 과정과 답을 제시하시오. (답만 기재하면 0점 처리)

가) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, (a, b)의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 $[a, b]$에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 $[a, b]$에서 감소한다.

나) 삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

다) 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$$

라) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다.

특히 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라 한다.

(i) 열린구간 (a, b)에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$

[문제 1-1] 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-1} & (x \neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$ 이 $x=1$에서 미분가능할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a는 상수이다.)

(1) a의 값을 구하시오.

(2) $f'(1)$의 값을 구하시오.

(3) 제시문 가)를 이용하여 함수 $f(x)$가 증가하는 구간을 모두 구하시오.

[문제 1-2] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치 (x, y)가

$$x=(1+\cos 2t)\cos 2t,\ \ y=(1+\cos 2t)\sin 2t$$

일 때, 제시문 나)와 다)를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

(2) 시각 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서 $t=\dfrac{3\pi}{2}$까지 점 P가 움직일 때, 점 P의 속력이 최대가 되는 시각 t를 구하고 이때의 점 P의 위치를 구하시오.

(3) 시각 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서 $t=\dfrac{3\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

[문제 1-3] 음이 아닌 실수 a에 대하여

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1+a\cos\theta}d\theta$$

일 때, 제시문 가)와 라)를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $I(2)$의 값을 구하시오.

(2) $x \geq 0$에서 함수 $I(x)$가 연속인지 불연속인지 조사하시오.

(3) $x \geq 0$에서 함수 $I(x)$의 증가와 감소를 조사하시오.

3. 출제 의도

자연 및 사회 현상에서 어떤 값이 변할 때 다른 값도 변하는 경우, 이를 탐구하는 중요한 수학적 도구는 함수이다. 함수는 다양한 변화 현상을 포함한 대응 관계를 표현하며, 대수적 조작이 가능하다. 또한 함수의 그래프를 통해 시각적으로 표현된다. 미분법은 함수의 도함수를 구하여 변화 현상을 해석하고 설명하는 데 활용되며, 적분법은 함수의 부정적분과 정적분을 통해 길이, 넓이, 부피 등을 해석하는 데 활용된다. 이러한 수학적 관계를 이해하고 표현함으로써 여러 가지 문제를 해결하는 능력과 미래를 예측할 수 있는 능력을 기를 수 있다.

1-1. 함수의 미분가능성 조건을 이해하고, 도함수를 활용하여 함수의 증가 구간을 판별할 수 있는지 평가하는 문제이다.
1-2. 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속력과 이동 거리를 구할 수 있는지 평가한다.
1-3. 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하고, 함수의 연속성과 도함수를 활용하여 증감 상태를 파악할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
제시문	[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-1	[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.
문제 1-2	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-3	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	미래엔	2017	34-37, 56-68
	수학I	김원경 외	비상	2017	37-56
	수학I	홍성복 외	지학사	2017	10-64
	수학II	박교식 외	동아출판	2017	50-102, 122-147
	수학II	홍성복 외	지학사	2017	52-103, 124-151
	수학II	고성은 외	좋은책신사고	2017	10-49
	수학II	김원경 외	비상	2017	50-97
	수학II	류희찬 외	천재교과서	2017	52-99
	미적분	권오남 외	교학사	2018	52-126
	미적분	김원경 외	비상	2018	46-94, 153-181
	미적분	박교식 외	동아출판	2018	124-169
	미적분	황선욱 외	미래엔	2018	52-131
	미적분	홍성복 외	지학사	2018	50-79, 136-175
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2018	68-90, 152-193

5. 문항 해설

[문제 1-1] 함수의 미분가능성 조건이 연속성을 포함하고 있음을 이해하여 미지수를 구하고, 몫의 미분법을 활용하여 도함수를 계산하는 문제이다. 미분계수의 정의와 도함수를 이용하여 특정 점에서의 미분계수를 구한 후, 제시된 명제에 따라 도함수의 부호를 조사하여 함수가 증가하는 구간을 판별하는 과정을 포함한다.

[문제 1-2] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이해하여 도함수 dy/dx를 구하고, 평면 위를 움직이는 점의 속도를 구하는 문제이다. 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 속력을 나타내는 식을 정리하고, 그 최댓값이 되는 시각을 구한 뒤, 해당 시간 구간에서 속력을 정적분하여 점이 움직인 거리를 도출하는 능력을 평가한다.

[문제 1-3] 삼각함수를 포함한 피적분함수에서 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하고, 이를 통해 정의된 함수의 식을 도출하는 문제이다. 도출된 함수에 대하여 극한값과 함숫값을 비교하여 연속성을 조사하고, 도함수를 구하여 부호를 판별함으로써 함수의 증가와 감소 상태를 논리적으로 설명할 수 있는지 평가한다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
1-1	함수의 분모와 분자를 인수분해하여 식을 정리할 수 있다.	3
	함수의 연속성을 이용하여 극한값을 계산하고, 상수 a의 값을 도출할 수 있다.	2
	몫의 미분법을 이용하여 도함수 $f'(x)$를 올바르게 구할 수 있다.	3
	$x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$의 값을 계산할 수 있다.	2
	도함수가 0이 되는 x값을 구하고, 부호 변화를 조사할 수 있다.	2
	증감표를 통해 함수가 증가하는 구간을 정확히 서술할 수 있다.	3
1-2	매개변수로 나타내어진 함수를 미분하여 dx/dt, dy/dt를 각각 구할 수 있다.	3
	dy/dx를 t에 대한 식으로 올바르게 표현할 수 있다.	2
	삼각함수의 덧셈정리 등을 활용하여 속력을 나타내는 식을 정리할 수 있다.	3
	속력이 최대가 되는 시각 t를 구하고, 그때의 점 P의 위치를 도출할 수 있다.	3
	평면 위를 움직이는 점의 이동 거리 공식을 이용하여 정적분 식을 세울 수 있다.	2
	정적분을 정확히 계산하여 이동 거리를 도출할 수 있다.	2
1-3	치환적분법을 적용하여 변수를 치환하고 적분 구간을 올바르게 설정할 수 있다.	1
	정적분을 계산하여 $I(2)$의 값을 정확히 도출할 수 있다.	3
	적분을 통해 $x=0$일 때의 함수값과 $x>0$일 때의 함수식을 각각 구할 수 있다.	4
	극한값과 함수값이 일치함을 보여 $x \geq 0$에서 연속임을 증명할 수 있다.	4
	함수 $I(x)$의 도함수를 구하고, 분자의 부호를 판별하기 위한 식을 세울 수 있다.	3
	도함수의 부호를 분석하여 $x \geq 0$에서 함수가 감소함을 논리적으로 설명할 수 있다.	5

7. 예시 답안 혹은 정답

[정답 1-1] (총 15점)

(1) a의 값 (5점)

$x \neq 1$에서의 함수 $f(x)$의 분자를 인수분해 하면

$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$

분모를 인수분해 하면

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

--[1점]

따라서 $x \neq 1$에서

$$f(x)=\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)}=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$$

--[2점]

미분가능하므로 연속이다.

$a = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)} = 0$

따라서

$a = 0$ 이다.

--[2점]

(2) $f'(1)$의 값 (5점)

(1)에 의해 $x > 0$일 때 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$이다.

--[1점]

$f(x)$의 분자를 $N(x)$, 분모를 $D(x)$라 하자.

$N(x) = x^2 - 3x + 2$, $D(x) = x + 1$이다.

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{\{D(x)\}^2} = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2 - 3x + 2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 5}{(x+1)^2}$$

--[2점]

따라서,

$$f'(1) = \frac{1+2-5}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

--[2점]

[다른 풀이]

(2) $f'(1)$의 값 (5점)

(1)에 의해 $x > 0$일 때 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$이다.

$f(x)$의 분자를 $N(x)$, 분모를 $D(x)$라 하자.

$N(x) = x^2 - 3x + 2$, $D(x) = x + 1$이다.

--[1점]

$x \neq 1$일 때 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{\{D(x)\}^2} = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2 - 3x + 2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 5}{(x+1)^2}$$

--[2점]

미분계수의 정의를 이용하면 다음과 같다.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x(\Delta x-1)}{\Delta x+2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-1}{\Delta x+2}=-\frac{1}{2}$$

따라서, $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$

--[2점]

(3) 함수 $f(x)$가 증가하는 구간 (5점)

도함수 $f'(x)$에서 $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$ 이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\sqrt{6}-1 \quad (x>0)$

--[2점]

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

x	0	$\cdots$	$\sqrt{6}-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	(2)	↘	$2\sqrt{6}-5$	↗

따라서, 함수 $f(x)$는 구간 $[\sqrt{6}-1,\infty)$에서 증가한다.

--[3점]

[정답 1-2] (총 15점)

$x=(1+\cos 2t)\cos 2t=\cos 2t+\cos^2 2t$

$y=(1+\cos 2t)\sin 2t=\sin 2t+\cos 2t\sin 2t$

(1) $\dfrac{dy}{dx}$를 t에 대한 식 (5점)

식 $x(t)$, $y(t)$를 t로 미분을 하면

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t-2\sin 2t\cos 2t-2\cos 2t\sin 2t=-2\sin 2t-2\sin 4t$$

$$\frac{dy}{dt}=2\cos 2t-2\sin 2t\sin 2t+2\cos 2t\cos 2t=2\cos 2t+2\cos 4t$$

--[3점]

따라서, $\dfrac{dy}{dx}$를 t에 대한 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cos 2t+2\cos 4t}{-2\sin 2t-2\sin 4t}=\frac{\cos 2t+\cos 4t}{-\sin 2t-\sin 4t}=-\frac{\cos 2t+\cos 4t}{\sin 2t+\sin 4t}$$

--[2점]

(2) 점 P의 속력 v이 최대가 되는 시각 t 및 점 P의 위치 (6점)

점 P의 속력 v는 다음과 같다.

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{4\sin^2 2t+8\sin 2t\sin 4t+4\sin^2 4t+4\cos^2 2t+8\cos 2t\cos 4t+4\cos^2 4t}$$

$$=2\sqrt{2+2(\sin 2t\sin 4t+\cos 2t\cos 4t)}$$

$$=2\sqrt{2+2(2\sin^2 2t\cos 2t+\cos 2t(1-2\sin^2 2t))}$$

$$=2\sqrt{2+2\cos 2t}$$

$$=(2\sqrt{2})\sqrt{1+(2\cos^2 t-1)}$$

$$=(2\sqrt{2})\sqrt{2\cos^2 t}$$

$$=-4\cos t\quad\left(\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3\pi}{2}\right)$$ ------------------------------------①

--[3점]

식 ①에서 속력 v이 최대인 시각은 $t=\pi$ 이므로

--[2점]

P의 위치는 $(2,0)$이다.

--[1점]

(3) 점 P가 움직인 거리 (4점)

점 P가 움직인 거리를 s라 하자.

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos t|\,dt$$

$\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3\pi}{2}$ 이므로 $|\cos t|=-\cos t$

--[2점]

$$s=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos t)\,dt$$

$= -4\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$

$= -4[(-1)-(1)] = 8$

따라서, 거리는 8이다.

---[2점]

[정답 1-3] (총 20점)

(1) $I(2)$의 값 (4점)

$u = 1+2\cos\theta$ 로 치환하면, $\dfrac{du}{d\theta} = -2\sin\theta$ 이고,

$\theta = 0$ 일 때 $u = 3$,

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $u = 1$ 이므로

---[1점]

$$I(2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1+2\cos\theta} d\theta = \int_3^1 \frac{-1}{2u} du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}\left[\ln|u|\right]_1^3 = \frac{\ln 3}{2}$$

따라서 $I(2) = \dfrac{\ln 3}{2}$

---[3점]

(2) 함수 $I(x)$가 연속인지 불연속인지 조사 (8점)

$x = 0$ 일 때,

$$I(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = \left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

---[1점]

$x > 0$ 일 때,

$u = 1+x\cos\theta$ 로 치환하면, $\dfrac{du}{d\theta} = -x\sin\theta$ 이고,

$\theta = 0$ 일 때 $u = x+1$,

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $u = 1$ 이므로

$$I(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{1+x\cos\theta}d\theta=-\frac{1}{x}\int_{x+1}^{1}\frac{1}{u}du$$

$$=\frac{1}{x}\int_1^{x+1}\frac{1}{u}du=\frac{1}{x}[\ln|u|]_1^{x+1}=\frac{\ln(x+1)}{x}$$

$I(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}\quad(x>0)$

--[3점]

따라서, $I(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & (x>0)\end{cases}$

이고, $x>0$이면 $\ln(x+1)$과 $\dfrac{1}{x}$는 연속이므로 $I(x)$는 연속이다.

--[2점]

$x=0$일 때,

$\lim\limits_{x\to 0+}I(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

$I(0)=\lim\limits_{x\to 0+}I(x)=1$

따라서, $I(x)$는 $x\ \geq\ 0$에서 연속이다.

--[2점]

(3) 함수 $I(x)$의 증가와 감소를 조사 (8점)

$I(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ 의 증감 확인

$x>0$에서 $f'(x)>0$일 때 증가, $f'(x)<0$일 때 감소한다.

$I(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$

$$I'(x)=-\frac{\ln(x+1)}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{1}{x+1}=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

--[3점]

$I'(x)$의 분자를 $N(x)$, 분모를 $D(x)$라 하자.

분모 $D(x)=x^2(x+1)>0$이므로 $I'(x)$의 부호와 $N(x)$의 부호는 같다.

$N(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$

$N(0)=0$

$N'(x)=1-\ln(x+1)-1=-\ln(x+1)$이므로

$x>0$ 일 때 $N'(x)<0$

즉, $x>0$에서 $N(x)<0$ 이다.

--[3점]

$x > 0$ 일 때 $I'(x) < 0$ 이므로 $I(x)$는 감소한다.

$x \geq 0$일 때 $I(x)$는 연속이고, $x > 0$ 일 때 $I(x)$는 미분가능하므로

따라서, $x \geq 0$ 일 때 $I(x)$는 감소한다.

--[2점]

[다른 풀이]

(3) 함수 $I(x)$의 증가와 감소를 조사 (8점)

임의의 실수 x_1, x_2가 구간 $[0, \infty]$내에 있고 구간 $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta \geq 0, \sin\theta \geq 0$ 가 성립된다.

$x_1 < x_2$일 때

$x_1 \cos\theta < x_2 \cos\theta$

--[2점]

$$\frac{\sin\theta}{x_1\cos\theta} > \frac{\sin\theta}{x_2\cos\theta}$$

--[2점]

따라서,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1+x_1\cos\theta}d\theta > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1+x_2\cos\theta}d\theta$ 가 성립하여 $I(x)$는 감소한다.

--[4점]

[논술고사 공학계열 2번]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	공학계열(수학) / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 수열
예상 소요 시간	45분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

【문제 2】 (50점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 대한 풀이 과정과 답을 제시하시오. (답만 기재하면 0점 처리)

가) 삼각형 ABC에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\sin B}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}$$

나) 삼각형 ABC에 대하여 다음이 성립한다.

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-2\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\cos C$$
$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2-2\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\cos A$$
$$\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos B$$

다) 삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

라) 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다. 이때 $b=\frac{a+c}{2}$임을 알 수 있다.

마) 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라고 하고, 그 일정한 수를 공비라고 한다.

[문제 2-1] 삼각형 ABC에서 각 변의 길이를 $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$, $\overline{\mathrm{AB}}=c$라 하자. a, b, c는 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이룬다. $\sin(B-A)$, $\sin A$, $\sin C$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 다음의 (1)~(4)를 r에 대한 식으로 나타내고, (1)~(4)를 이용하여 (5)의 물음에 답하시오.

(1) $\cos A$

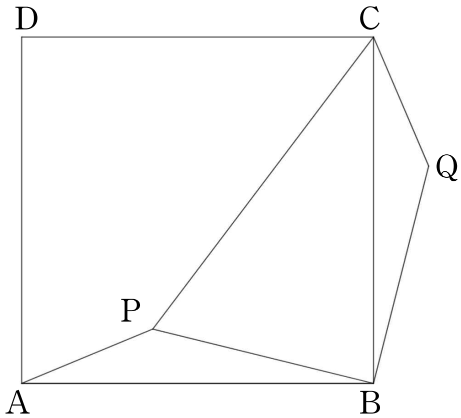
(2) $\cos B$

(3) $\dfrac{\sin B}{\sin A}$

(4) $\dfrac{\sin C}{\sin A}$

(5) r^2의 값을 구하시오.

[문제 2-2] 그림과 같이 정사각형 ABCD의 내부에 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{PA}}=5$, $\overline{\mathrm{PB}}=8$, $\overline{\mathrm{PC}}=13$이다. $\triangle$PAB를 점 B를 중심으로 시계 방향으로 90° 회전시킨 삼각형을 $\triangle$QCB라고 하자.



다음을 구하시오.

(1) $\overline{\mathrm{PQ}}$

(2) $\cos(\angle \mathrm{CPQ})$

(3) $\sin(\angle \mathrm{CPQ})$

(4) $\cos(\angle \mathrm{BPC})$

(5) (1)~(4)를 이용하여 정사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.

3. 출제 의도

[문제 2-1] 사인법칙과 코사인법칙의 정의를 이해하고 이를 적용하여 선분의 길이, 도형의 넓이 등을 구하는 문제이다. 수열의 정의로부터 관계식을 도출하고, 이를 삼각함수의 성질과 연계하여 방정식을 정리하여 푸는 문제이다.
[문제 2-2] 사인법칙과 코사인법칙을 사용하여 주어진 정사각형의 넓이를 구하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
제시문	[12수학I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 2-1	[12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문제 2-2	[12수학I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	지학사	2018	p95-103
	수학	박교식 외	동아출판	2018	p86-93
	수학	황선욱 외	미래N	2018	p97-106
	수학	고성은 외	좋은책신사고	2018	p92-97
	수학	김원경 외	비상	2018	p95-104
	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	p97-110
	수학I	홍성복 외	지학사	2018	p114-131
	수학I	박교식 외	동아출판	2018	p105-121
	수학I	황선욱 외	미래N	2018	p121-136
	수학I	고성은 외	좋은책신사고	2018	p113-128
	수학I	김원경 외	비상	2018	p117-133
	수학I	류희찬 외	천재교과서	2018	p120-139
	미적분	황선옥 외	미래N	2019	p63-69
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	p68-74
	미적분	이준열 외	천재교육	2019	p65-70
	미적분	김원경 외	비상	2019	p58-62
	미적분	박교식 외	동아출판	2019	p61-66
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	p58-64
기타					

5. 문항 해설

[문제 2-1] a, b, c사이의 관계가 등비수열임을 이용하여 코사인법칙과 사인법칙에 적용하여 식을 공비를 이용하여 표현한다. 삼각함수의 덧셈정리를 사용하여 r^2에 대한 방정식을 만들고 이의 해를 구하는 문제이다.
[문제 2-2] 사인법칙과 코사인법칙을 사용하여 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
2-1(1)	코사인법칙을 적용하여 $\cos A$를 r로 표현할 수 있는가.	3.5
2-1(2)	코사인법칙을 적용하여 $\cos B$를 r로 표현할 수 있는가.	3.5
2-1(3)	사인법칙을 적용하여 $\frac{\sin B}{\sin A}$를 r로 표현할 수 있는가.	2.5
2-1(4)	사인법칙을 적용하여 $\frac{\sin C}{\sin A}$를 r로 표현할 수 있는가.	2.5
2-1(5)	(1)-(4)의 결과를 활용하여 r^2의 값을 구할 수 있는가.	13
2-2(1)	$\Delta \mathrm{PAB} \equiv \Delta \mathrm{QCB}$를 활용하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 값을 구할 수 있는가.	4
2-2(2)	코사인법칙을 활용하여 $\cos(\angle \mathrm{CPQ})$의 값을 구할 수 있는가.	5
2-2(3)	$\sin(\angle \mathrm{CPQ})$의 값을 계산할 수 있는가.	5
2-2(4)	$\cos(\angle \mathrm{BPC})$의 값을 계산할 수 있는가.	5
2-2(5)	코사인법칙을 활용하여 $\overline{\mathrm{BC}}^2$의 값을 계산할 수 있는가.	6

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2-1]

(1) 코사인법칙에 의해 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(ar)^2+(ar^2)^2-a^2}{2\cdot ar\cdot ar^2}=\dfrac{r^4+r^2-1}{2r^3}$

---[3.5점]

(2) 코사인법칙에 의해 $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{(ar^2)^2+a^2-(ar)^2}{2\cdot ar^2\cdot a}=\dfrac{r^4-r^2+1}{2r^2}$

---[3.5점]

(3) 사인법칙에 의해 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$이므로 $\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{ar}{a}=r$

---[2.5점]

(4) 사인법칙에 의해 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$이므로 $\dfrac{\sin C}{\sin A}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{ar^2}{a}=r^2$

---[2.5점]

(5) $\sin(B-A)$, $\sin A$, $\sin C$는 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\sin A=\sin(B-A)+\sin C$

삼각함수의 덧셈정리를 적용하면

$2\sin A=\sin B\cos A-\sin A\cos B+\sin C$

---[4점]

(1)-(4)의 결과를 적용하면

$$2\sin A=r\sin A\frac{r^4+r^2-1}{2r^3}-\sin A\frac{r^4-r^2+1}{2r^2}+r^2\sin A$$

삼각형을 이루는 경우 $\sin A\neq 0$이므로 양변을 $\sin A$로 나누면

$$2=r\frac{r^4+r^2-1}{2r^3}-\frac{r^4-r^2+1}{2r^2}+r^2=\frac{r^4+r^2-1}{2r^2}-\frac{r^4-r^2+1}{2r^2}+r^2=1-\frac{1}{r^2}+r^2$$

이 식을 정리하면 $r^4-r^2-1=0$

---[5점]

$r^2=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$인데, $r^2>0$이므로 $r^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

---[4점]

[문제 2-2]

(1) $\Delta\mathrm{PAB}\equiv\Delta\mathrm{QCB}$이므로 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QB}}$이고, 90° 회전이므로 $\angle\mathrm{PBQ}=90^\circ$.

삼각형 PBQ는 직각 이등변 삼각형.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=8\sqrt{2}$

---[4점]

(2)

$$\cos(\angle CPQ) = \frac{\overline{PC}^2 + \overline{PQ}^2 - \overline{QC}^2}{2 \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PQ}}$$

$$= \frac{13^2 + (8\sqrt{2})^2 - 5^2}{2 \cdot 13 \cdot 8\sqrt{2}}$$

$$= \frac{136}{104\sqrt{2}} = \frac{68}{52\sqrt{2}} = \frac{34}{26\sqrt{2}} = \frac{17}{13\sqrt{2}} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$

--[5점]

(3) $\angle CPQ$는 삼각형의 한 각이므로 $(0, \pi)$내에 존재한다.

따라서 $\sin(\angle CPQ)$는 양수이다.

$$\sin(\angle CPQ) = \sqrt{1 - \left(\frac{17\sqrt{2}}{26}\right)^2} = \sqrt{\frac{98}{676}} = \sqrt{\frac{49}{338}} = \frac{7}{13\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{26}$$

--[5점]

(4)

$$\cos(\angle BPC) = \cos(\angle CPQ + 45^\circ)$$
$$= \cos(\angle CPQ) \cdot \cos(45^\circ) - \sin(\angle CPQ) \cdot \sin(45^\circ)$$
$$= \frac{17\sqrt{2}}{26} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{26} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{5}{13}$$

--[5점]

(5) 정사각형 ABCD의 넓이는 한 변의 길이의 제곱과 같으므로,

$$\overline{BC}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PB} \cdot \cos(\angle BPC)$$
$$= 13^2 + 8^2 - 2 \cdot 13 \cdot 8 \cdot \frac{5}{13}$$
$$= 153$$

--[6점]