[논술고사 이학계열 1번]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">이학계열(수학) / 문제1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학I, 수학II</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>복소수, 집합과 명제, 수열, 미분, 평균값 정리</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">45분 / 90분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

【문제 1】 (50점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 대한 풀이 과정과 답을 제시하시오.(답만 기재하면 0점 처리)

가) 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)의 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 켤레복소수라 하고, 이것을 기호로

$$\overline{a+bi}$$

로 나타낸다. 즉, $\overline{a+bi}=a-bi$이다. (단, $i=\sqrt{-1}$)

나) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때, 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x\to 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

다) 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라 하고, 곱하는 일정한 수를 공비라고 한다. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 제n항에 공비 r을 곱하면 제$(n+1)$항이 되므로

$$a_{n+1}=ra_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립한다.

[문제 1-1] 집합 $A=\{z \mid z\bar{z}=2, z\text{는 복소수}\}$이고 집합 $B=\{z \mid z=k(2+2i),\ k\text{는 실수}\}$일 때, 집합 $A\cap B$를 원소나열법으로 나타내시오.

[문제 1-2] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $x\ge 0$일 때 $f(x)=|(x+2)(x-3)(x-4)|$이고, 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$가 성립한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 제시문 나)를 이용하여 $x=4$에서 $f(x)$가 미분가능하지 않음을 보이시오.

(2) $x=a$에서 $f(x)$가 미분가능하지 않을 때, a의 값을 모두 구하시오.

[문제 1-3] 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 9이고 공비가 $\frac{1}{27}$인 등비수열이다. 점 R_n의 좌표를 (a_n, b_n)이라 하고, 선분 $\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n+1}$을 지름으로 하는 원을 C_n이라 하자. 원 C_n의 중심을 O_n이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 R_1, 점 R_2, 점 R_3과 점 O_1, 점 O_2의 좌표를 각각 구하시오.

(2) 점 O_n의 좌표를 n에 대한 식으로 나타내시오.

(3) 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2$의 그래프가 점 O_1과 점 O_2를 지날 때, 두 상수 a, b의 값을 구하시오.

(4) (3)에서 구한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$ $\left(\frac{1}{2}\le t\le 1\right)$에 대하여 점 P와 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ 사이의 거리가 $t=\alpha$에서 최대일 때 α^2의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

함수는 여러 가지 현상에서 대상 간의 연관성이나 종속성을 해석하고 예측하는 수단이 되고, 다양한 변화 현상에서의 수학적 관계를 이해하고 표현함으로써 여러 가지 문제를 해결하는데 도움이 된다. 수열은 규칙적으로 나열된 수로 나타낼 수 있는 현상을 탐구하는 데 유용한 함수이다. 이 문항에선 이러한 함수와 수열을 활용할 수 있는 능력을 평가한다.
첫째, 켤레복소수의 성질과 교집합의 정의를 이용하여 주어진 집합을 원소나열법으로 표현할 수 있는지 평가한다.
둘째, 함수의 미분가능성의 정의와 미분계수의 기하적 의미를 이해하고 함수의 그래프에서 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
셋째, 등비수열로 나타낸 순서쌍에 대한 관찰을 통해 문제를 이해하고 접선의 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[10수학01-05] 복소수의 뜻과 성질을 이해하고 사칙연산을 할 수 있다. [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 1-1	[10수학01-05] 복소수의 뜻과 성질을 이해하고 사칙연산을 할 수 있다. [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. [10수학03-03] 집합의 연산을 할 수 있다.
문제 1-2	[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다. [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.
문제 1-3	[12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	미래엔	2020	13-20 34-37 83-85 128-138 175-183
	수학Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2020	121-138
	수학	김원경 외	비상	2020	11-19 30-32 112-122 159-173
	수학Ⅰ	김원경 외	비상	2020	117-133
	수학	이준열 외	천재교육	2020	10−20 31−36 133−136 172−181
	수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2020	120-137
	수학	권오남 외	교학사	2020	11-15 29-33 124-126 163-179
	수학Ⅰ	권오남 외	교학사	2020	116-132
	수학 Ⅱ	배종숙 외	금성출판사	2020	20-22 33-36 54-58 78-82
	수학Ⅰ	홍성복 외	지학사	2020	114-131
기타					

5. 문항 해설

본 문제들은 복소수에 대한 개념과 미분가능성, 등비수열에 대한 내용을 평가한다. 문제 1-1은 복소수에 대한 개념과

원소나열법에 대해 명확히 이해하는지 평가한다. 문제 1-2는 함수의 미분가능성과 미분계수의 기하적 의미를 이해하는지 평가한다. 문제 1-3은 등비수열과 함수의 미분에 관련된 개념을 포괄적으로 질문하여 종합적인 문제해결 역량을 평가한다.

[문제1-1]
켤레복소수의 성질을 이해하고, 이를 활용하여 주어진 집합을 원소나열법으로 표기할 수 있는지 묻는 문제이다.

[문제 1-2]
함수의 미분가능성과 미분계수의 기하적 의미에 대해 이해하는지 묻는 문제이다.

[문제 1-3]
(1) 등비수열의 정의를 이용하여 특정한 항을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.
(2) 두 개의 등비수열의 일반항을 이용하여 원의 중심을 구하는 문제이다.
(3) 삼차함수의 그래프가 지나는 점의 좌표를 활용하여 삼차함수의 계수를 묻는 문제이다.
(4) 접선의 성질 및 한 점과 직선 사이의 거리를 구하는 방법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
1-1	켤레복소수와 집합의 정의를 이해하고 주어진 두 집합의 교집합을 원소 나열법으로 표현할 수 있다. • 원소가 모두 맞으면 **(10점)** • 원소 중 일부가 맞으면 **(부분점수)**	10
1-2	주어진 함수의 미분가능 여부를 판단할 수 있다. • 주어진 점에서 미분계수가 존재하지 않음을보인경우 **(6점)**	6
	주어진 함수의 미분가능한 점을 찾을 수 있다. • 미분불가능한 점 모두가 맞으면 **(6점)** • 일부가 맞으면 **(부분점수)**	6
1-3	등비수열을 활용하여 문제에 주어진 점의 좌표를 바르게 구할 수 있다. - 각 좌표당 1점 **(5점)**	5
	등비수열의 일반항을 이용하여 O_n의 좌표를 바르게 나타낼 수 있다. **(6점)**	6
	삼차함수의 계수를 구할 수 있다. **(8점)**	8
	점 P와 접선 사이의 거리를 구할 수 있다. **(9점)**	9

7. 예시 답안 혹은 정답

[답안 1-1]

집합B의 조건에 따르면 $z=2k+2ki$이고 집합A의 조건에 따라 $(2k)^2+(2k)^2=2$임. $k=\pm\frac{1}{2}$.

따라서 $A\cap B=\{1+i,-1-i\}$임.

채점기준

정답: $\{1+i,-1-i\}$인 경우 10점

정답: $1+i,-1-i$인 경우 8.2점

정답: $\{1+i,1-i\}$ 또는 $\{1-i,-1-i\}$ 등 1개만 맞는 경우 4.2점

정답: $1+i,-1+i$ 또는 $1-i,-1-i$ 등 1개만 맞고, 집합 기호를 안 쓴 경우 3.2점

[답안 1-2]

(1)

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{(4+\Delta x+2)(4+\Delta x-3)(4-4-\Delta x)}{\Delta x}=-6$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(4+\Delta x+2)(4+\Delta x-3)(4-4+\Delta x)}{\Delta x}=6$$

즉, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 미분가능하지 않다.

--총 6점

(2) 미분가능하지 않은 a의 값은 -4, -3, 0, 3, 4

근거 예시 1) 그래프를 그리고 찾기

근거 예시 2) 각 점에서 미분계수를 계산한 경우

채점 기준표

답을 맞추고 근거를 제시한 경우 ----------------------------6점

답만 모두 맞춘 경우 ------------------------------------5.1점

답에서 하나 이상 빠진 경우 -------------------------------3.2점

답에서 틀린 점을 포함하는 경우 ------------------------- 3.2점
답에서 정답이 하나도 없는 경우 ----------------------0점
--총 6점

[답안 1-3]
(1)

$$\mathrm{R}_1 = (2,9),\ \mathrm{R}_2 = (\frac{2}{3},\frac{1}{3}),\ \mathrm{R}_3 = (\frac{2}{9},\frac{1}{81}),\ \mathrm{O}_1 = (\frac{4}{3},\frac{14}{3}),\ \mathrm{O}_2 = (\frac{4}{9},\frac{14}{81})$$

각 좌표당 1점
-- 총 5점

(2)
점O_n의 좌표는

$$\mathrm{O}_n = \left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \frac{b_n + b_{n+1}}{2}\right)$$

으로 계산할 수 있음.
-- 3점

$$\mathrm{O}_n = (\frac{4}{3^n}, \frac{126}{27^n})$$

-- 3점
총 6점

(3)

$$f(\frac{4}{3}) = a(\frac{4}{3})^3 + b(\frac{4}{3})^2 = \frac{14}{3}$$

$$f(\frac{4}{9}) = a(\frac{4}{9})^3 + b(\frac{4}{9})^2 = \frac{14}{81}$$

$$a = \frac{63}{32},\ b = 0$$

-- 8점

(4)
직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$의 기울기는

$$\frac{\frac{14}{81}-\frac{14}{3}}{\frac{4}{9}-\frac{4}{3}}=\frac{91}{18}$$

-- 3점

가장 먼 거리에 있는 점은 기울기가 $\frac{91}{18}$인 접선과 만나는 접점이므로 $\frac{91}{18}=\frac{63}{32}(3x^2)$,

$\alpha=\sqrt{\frac{208}{243}}$ 이므로 $\alpha^2=\frac{208}{243}$ (또는 $\frac{1456}{1701}=\frac{2912}{3402}$)

-- 6점

총 9점

[논술고사 이학계열 2번]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	이학계열(수학) / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II
	핵심개념 및 용어	다항식, 방정식과 부등식, 도형의 방정식, 함수와 그래프, 수열, 함수의 극한과 연속, 미분, 적분
예상 소요 시간	45분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

【문제 2】 (50점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 대한 풀이 과정과 답을 제시하시오.(답만 기재하면 0점 처리)

가) 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이다.

나) 사인함수 $y=\sin x$는 다음과 같은 성질을 갖는다.
(1) 정의역이 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.
(2) 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, $\sin(x+2n\pi)=\sin x$ (단, n은 정수)

다) 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

라) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서
(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다.
(2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

[문제 2-1] 원 $(x-a)^2+(y-a^2)^2=b^2$이 두 직선 $y=-x+4$와 $y=x+2$에 동시에 접하도록 하는 두 실수 a, b의 순서쌍 (a,b)를 모두 구하시오.

[문제 2-2] 자연수 n과 $0 \le a < 1$인 실수 a에 대하여 $n+a$는 x에 대한 방정식 $x^3+6x^2+12x-k+8=0$의 한 근이다. $n^2-2na<0$이 성립할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

[문제 2-3] 자연수 n에 대하여 함수 $y=\sin(20\pi x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{n-1}{10}$의 교점 중 x좌표가 $(n+1)^2$ 이상이고 $2(n+1)^2$ 이하인 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값을 구하시오.

[문제 2-4] 두 함수 $f(x)=x^2-2x+|x^2-2x|$, $g(x)=-x+12$가 있다. $a>2$인 실수 a에 대하여 함수 $h(a)=\int_{-a}^{a}\{f(x)-g(x)\}dx$라 할 때, $h(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 이를 이용하여 $h(a)$의 극값을 구하시오.

3. 출제 의도

다항식의 연산 및 방정식과 부등식은 수학적 사고 과정의 기본이 되고 수학적 모델링에 활용되며 다양한 문제 해결에 활용된다. 이러한 대수적 사고를 도형에 활용하여, 도형의 방정식으로 나타내는 등 기하와 대수를 연결하여 도형을 다루어봄으로써 논리적이고 창의적인 사고를 경험할 수 있다. 또한, 대수적 사고 과정을 다양한 변화 현상에서 수학적 관계를 이해하고 표현하는 함수에 활용할 수 있다.

한편, 함수의 순간적인 변화를 설명하는 미분과 미분의 역관계에 있는 적분은 변화 현상과 관련된 많은 문제 해결에 활용된다.

이러한 내용을 종합적으로 다루어 다항식의 연산 및 방정식과 부등식을 활용하는 능력을 평가하고, 함수의 개념을 이해하며 함수를 그래프로 표현하고, 미분과 적분의 이해 및 활용을 평가하고자 한다.

2-1. 원의 방정식을 이해하고, 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

2-2. 미지수가 1개인 연립일차부등식과 다항식의 인수분해를 활용하여 조건이 주어진 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

2-3. 삼각함수의 그래프에 대한 이해를 바탕으로 교점의 개수를 구할 수 있고, 수열을 이해하며 수열의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

2-4. 정적분으로 정의된 함수를 이해하고, 부정적분을 구할 수 있으며, 함수의 극값을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
제시문	[10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문제 2-1	[10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
문제 2-2	[10수학01-14] 미지수가 1개인 연립일차부등식을 풀 수 있다. [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.
문제 2-3	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 2-4	[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	미래엔	2020	34-39, 89-95, 111-113, 139-148, 219-223
	수학Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2020	81-89, 121-122, 143-149
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2020	35−39, 82−88, 122−128
	수학	김원경 외	비상	2020	30−32, 76−79, 120−122, 127−136, 203−208
	수학Ⅰ	김원경 외	비상	2020	76-88, 117-118, 139-144
	수학Ⅱ	김원경 외	비상	2020	35-39, 78-85, 112-118
	수학	이준열 외	천재교육	2020	31-35, 87-89, 133-135, 141-149, 223-227
	수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2020	82-92, 121-122, 142-151
	수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2020	35-39, 83-89, 121-126
	수학	권오남 외	교학사	2020	29-33, 81-83, 124-126, 131-139, 211-218
	수학Ⅰ	권오남 외	교학사	2020	80-96, 116-117, 138-145
	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2020	37-41, 88-95, 134-136
	수학	홍성복 외	지학사	2020	34-37, 87-90, 134-135, 141-148, 219-222
	수학Ⅰ	홍성복 외	지학사	2020	81-88, 115-116, 137-143
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	36-40, 83-89, 125-134
	수학	박교식 외	동아출판	2020	25-28, 78-80, 122-124, 128-137, 211-214
	수학Ⅰ	박교식 외	동아출판	2020	72-81, 105-106, 127-133
	수학Ⅱ	박교식 외	동아출판	2020	36-41, 81-91, 123-131

5. 문항 해설

본 문항에서는 다항식, 방정식과 부등식, 함수의 뜻을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다. 또한, 함수에 미분과 적분을 활용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

[문제 2-1] 원의 방정식을 이해하고, 원의 중심(한 점)과 직선 사이의 거리를 활용하여 해결하는 문제이다.
[문제 2-2] 연립일차부등식과 다항식의 인수분해(또는 연속함수의 성질) 및 이차부등식과 이차함수의 관계를 활용하여 해결하는 문제이다.
[문제 2-3] 삼각함수의 그래프를 이해하고, 수열의 뜻과 수열의 합의 성질을 활용하여 해결하는 문제이다.
[문제 2-4] 함수의 개념을 이해하고, 다항함수의 부정적분을 활용하며, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소의 개념을 활용하여 해결하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
2-1	원의 중심, 즉 한 점에서 원에 접하는 직선까지의 거리를 활용하여 원의 중심과 반지름을 구할 수 있다. • 중심에서 두 직선까지의 거리를 활용하여 a값을 구하면 (4점) • 구한 값을 활용하여 반지름을 구하고, 순서쌍으로 표현하면 (6점)	10
2-2	주어진 조건을 미지수가 1개인 연립부등식으로 나타내고, 인수분해를 활용하여(또는 연속함수의 성질) 값의 범위를 구할 수 있다. • 조건을 이용하여 미지수가 1개인 연립부등식을 활용하여 n의 값을 구하면 (3점) • 연립부등식을 활용하여 a의 범위를 구하면 (3점) • 인수분해를 활용하여 실수 k의 값의 범위를 구하면 (6점)**[풀이1]** • 연속함수의 성질 및 이차부등식을 활용하여 실수 k의 값의 범위를 구하면 (6점)**[풀이2]**	12
2-3	주어진 사인함수의 그래프와 직선의 그래프가 만나는 교점의 개수를 사인함수의 정의를 활용하여 구할 수 있다. • 사인함수의 주기를 구하면 (2점) • n의 범위에 따라 a_n을 각각 구하면 (8점) • $\sum$의 값을 구하면 (3점)	13
2-4	주어진 두 함수를 활용하여 함수 $h(a)$의 범위를 나누고, 정적분에 미분을 활용하여 극값을 구할 수 있다. • 주어진 두 함수를 활용하여 함수 $h(a)$의 범위를 나누면 (6점) • 함수 $h(a)$가 극값을 가질 a를 구하면 (4점) • 함수의 증가와 감소를 활용하여 함수 $h(a)$의 극값을 구하면 (5점)	15

7. 예시 답안 혹은 정답

[답안 2-1] (10점)

중심 (a,a^2)에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$d=\dfrac{|a+a^2-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|a-a^2+2|}{\sqrt{2}}$. 즉, $|a+a^2-4|=|a-a^2+2|$이다.

ⅰ) $a+a^2-4=a-a^2+2$일 때,

$a=\pm\sqrt{3}$

ⅱ) $a+a^2-4=-(a-a^2+2)$일 때,

$a=1$.

---[4점]

$|b|=d$이므로, a와 b의 값을 모두 구하면

$a=\sqrt{3}$일 때 $b=\pm\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, $a=-\sqrt{3}$일 때 $b=\pm\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, $a=1$일 때, $b=\pm\sqrt{2}$이다.

따라서 순서쌍 (a,b)는

$\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)$, $(1,\sqrt{2})$, $(1,-\sqrt{2})$이다.

---[6점]

[답안 2-2] (12점)

[풀이1]

$n^2-2na<0$--①

이므로 $n^2<2na$이다.

$0\le a<1$이므로 $n^2<2na<2n$이다.

따라서 $n^2-2n<0$을 만족하는 자연수 $n=1$이다.

--[3점]

$n=1$을 ①에 대입하면, $\frac{1}{2}<a$ ---②

따라서 ②와 $0\le a<1$을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $\frac{1}{2}<a<1$이다.---③

--[3점]

$f(x)=x^3+6x^2+12x+8$이라 하면, 주어진 방정식의 해는

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표이다.

다항식 $f(x)$를 정리하면 $f(x)=(x+2)^3$이고 $n+a$가 방정식 $f(x)=k$의 한 근이므로,

$(n+a+2)^3=k$ (n은 자연수, $0\le a<1$)를 만족한다.

$n=1$과 ③에 의해 $\frac{7}{2}<n+a+2<4$이다.

--[4점]

그러므로 실수 k의 범위는 $\left(\frac{7}{2}\right)^3<k<4^3$ (또는 $\frac{343}{8}<k<64$).

--[2점]

[풀이2]

조건에 의해 $n^2-2na<0$--①

이므로 $n^2<2na$이다.

$0\le a<1$이므로 $n^2<2na<2n$이다.

그러므로 $n^2-2n<0$을 만족하는 자연수 $n=1$이다.

--[3점]

$n=1$을 ②에 대입하면, $\frac{1}{2}<a$를 만족한다.--②

따라서 ②와 $0\le a<1$을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $\frac{1}{2}<a<1$이다.--③

--[3점]

$n+a$는 x에 대한 방정식 $x^3+6x^2+12x-k+8=0$의 한 근이고 $\frac{3}{2}<n+a<2$를 만족한다.

$f(x)=x^3+6x^2+12x+8$이라 하면, 주어진 방정식의 해는

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표이다.

$f(x)$는 모든 실수에서 연속이고, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{343}{8}\neq f(2)=64$이므로,

사잇값의 정리에 의해 $f\left(\frac{3}{2}\right)$과 $f(2)$ 사이에 $f(x)=k$인 x가

열린구간 $\left(\frac{3}{2},2\right)$에서 적어도 하나 존재한다.

즉, $\left(f\left(\frac{3}{2}\right)-k\right)\times(f(2)-k)<0$

---[4점]

그러므로 실수 k의 값의 범위는 $\left(\frac{7}{2}\right)^3 < k < 4^3$(또는 $\frac{343}{8} < k < 64$)이다.

---[2점]

[답안 2-3] (13점)

$y=\sin(20\pi x)$는 주기가 $\frac{1}{10}$인 주기함수이다.

---[2점]

따라서 $y=\sin(20\pi x)$와 $y=\frac{n-1}{10}$의 교점의 x좌표가 $(n+1)^2$이상이고 $2(n+1)^2$이하인 교점의 개수는 x좌표가 0이상이고 $(n+1)^2$이하인 교점의 개수와 같다.

이때 $y=\sin(20\pi x)$와 $y=\frac{n-1}{10}$이 만나는 점의 개수인 a_n를 구하면,

ⅰ) $n=1$일 때, $20(n+1)^2+1=81$

ⅱ) $n=2,\cdots,10$일 때, $20(n+1)^2$

ⅲ) $n=11$일 때, $10(n+1)^2=1440$

ⅳ) $12 \le n \le 20$일 때, 0

---[8점]

*** ⅰ)~ⅳ) 각 풀이당 2점**

그러므로 $\sum_{n=1}^{20} a_n = 81 + \sum_{n=2}^{10}\{20(n+1)^2\} + 10 \times 12^2 = 11541$

---[3점]

[답안 2-4] (15점)

$f(x)$는 $x<0$ 또는 $x \ge 2$일 때 $f(x)=2x^2-4x$,

$0 \le x < 2$일 때 $f(x)=0$이다.

$a>2$이므로

$$h(a)=\int_{-a}^{0}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{2}^{a}\{f(x)-g(x)\}dx$$

---[6점]

$=\frac{4}{3}(a^3-18a+2)$이다.

$h(a)=\frac{4}{3}(a^3-18a+2)$이므로 $h'(a)=4(a^2-6)=0$인 $a=\pm\sqrt{6}$이다.

이 중에 $a>2$인 $a=\sqrt{6}$이므로,

---[4점]

증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(2)	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$
$h'(a)$		$-$	0	$+$
$h(a)$		↘	극소	↗

---[3점]

$h(a)$는 $a=\sqrt{6}$일 때 극솟값 $-16\sqrt{6}+\dfrac{8}{3}$을 갖고, 극댓값은 갖지 않는다.

--[2점]