[논술고사 공학계열 1번]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	공학계열(수학) / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	방정식과 부등식, 함수, 지수와 로그, 수열의 극한, 미분법, 적분법
예상 소요 시간	45분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

【문제 1】 (50점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 대한 풀이 과정과 답을 작성하시오.(답만 기재하면 0점 처리)

가) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

나) 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

다) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \ \left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

[문제 1-1] 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차함수 $y = 2x^2 - 5(n+2)x + 3a_n$의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y = 2x^2 - 5nx + 3a_n$의 그래프는 x축과 만나지 않는다고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값을 구하시오.

[문제 1-2] 함수 $f(x) = (x-5)e^{x}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 이를 이용하여 $f(x)$의 극값을 구하시오.

(3) 점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있을 때, a의 값의 범위를 구하시오.

[문제 1-3] 제시문 다)를 이용하여 함수 $f(x)=\ln 3x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3n+2k}\right)f\left(3+\frac{2k}{n}\right)$의 값을 구하시오.

[문제 1-4] 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수의 그래프의 개형을 이용하여 두 함수 $y=\ln x$와 $y=\frac{1}{2x}$의 그래프의 교점의 개수를 구하시오.

(2) 양의 실수 t에 대하여 두 함수 $f(x)=\left(4t^4+3t^2+1\right)\ln(x-t)$, $g(x)=3e^{2x-a}$의 그래프가 오직 한 점 A에서 만나고 점 A에서 두 그래프에 동시에 접하는 접선이 존재하도록 하는 실수 a의 값을 $h(t)$라 하자. $h'(2)$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

자연 및 사회 현상에서 어떤 값이 변할 때 다른 값도 변하는 경우, 이를 탐구하는 중요한 수학적 도구는 함수이다. 함수는 다양한 변화 현상을 포함한 대응 관계를 표현하며, 대수적 조작이 가능하다. 또한 함수의 그래프를 통해 시각적으로 표현된다. 미분법은 함수의 도함수를 구하여 변화 현상을 해석하고 설명하는 데 활용되며, 적분법은 함수의 부정적분과 정적분을 통해 길이, 넓이, 부피 등을 해석하는 데 활용된다. 이러한 수학적 관계를 이해하고 표현함으로써 여러 가지 문제를 해결하는 능력과 미래를 예측할 수 있는 능력을 기를 수 있다.

1-1. 수열의 극한 개념을 활용하여 주어진 수열이 수렴하는지 판별하고, 극한값을 구하는 능력을 평가하는 문제이다.
1-2. 함수의 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구하고, 함수의 증가·감소 및 극값을 분석하며, 특정 조건에서 두 개의 접선을 가질 수 있는 변수의 범위를 구하는 능력을 평가하는 문제이다.
1-3. 정적분의 정의 및 정적분과 급수의 관계를 이해하고, 이를 이용해 주어진 함수의 정적분 값을 구하는 능력을 평가하는 문제이다.
1-4. 함수의 그래프 해석, 교점 개수 분석, 미분을 활용한 접선 개념 적용, 그리고 특정 조건을 만족하는 변수 값을 찾는 문제 해결 능력을 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
문제 1-1	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문제 1-2	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-3	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
문제 1-4	[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	미래엔	2017	56-68
	수학I	김원경 외	비상	2017	37-56, 127-155
	수학I	홍성복 외	지학사	2017	10-64
	수학II	박교식 외	동아출판	2017	50-102, 122-139
	수학II	홍성복 외	지학사	2017	52-98, 124-145
	미적분	김원경 외	비상	2018	120-146
	미적분	박교식 외	동아출판	2018	8-46, 100-139
	미적분	황선욱 외	미래엔	2018	105-120, 106-131, 143-170
	미적분	홍성복 외	지학사	2018	10-47, 170-180
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2018	150-154

5. 문항 해설

[문제 1-1] 극한의 성질을 활용하여 수열이 수렴하는지 판별한 후, 수렴한다면 극한값을 구하는 문제이다.

[문제 1-2] 미분계수를 이용하여 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 도함수를 활용하여 함수의 증감 및 극값을 구하는 문제이다.

[문제 1-3] 정적분과 급수의 관계를 활용하여 구하고자 하는 급수의 합을 정적분으로 나타내고, 치환적분법을 이용하여 특정 구간에서 적분의 값을 구하는 문제이다.

[문제 1-4] 주어진 두 함수의 그래프를 해석하여 교점의 개수를 분석한 후, 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구한다. 이후, 두 함수가 동일한 접선을 가질 조건을 설정하여 특정 변수 값의 범위를 결정하고, 가능한 접선의 개수를 도출하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
1-1	주어진 이차함수가 x축과 만나는 조건을 이용하여 적절한 부등식을 설정할 수 있다.	2
	주어진 조건(그래프가 x축과 만나지 않음)을 이용하여 적절한 부등식을 설정할 수 있다.	2
	설정된 두 부등식을 이용해 a_n의 범위를 도출할 수 있다.	2
	수열의 극한값의 대소관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.	2
1-2	주어진 함수의 도함수를 올바르게 구하고, 접점에서의 기울기를 구할 수 있다.	3
	접선의 방정식을 바르게 구할 수 있다.	3
	도함수의 부호를 분석하여 증가·감소 구간을 표로 나타내고, 극값을 구할 수 있다.	2
	판별식을 이용하여 특정 조건에서 접선이 두 개 존재할 범위를 구할 수 있다.	2
1-3	정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 정적분으로 바르게 나타낼 수 있다.	4
	변수를 변환하여 치환적분의 과정을 논리적으로 수행할 수 있다.	5
	치환한 함수의 정적분을 정확히 계산할 수 있다.	5
1-4	두 함수의 그래프를 분석하여 교점의 개수를 올바르게 판별할 수 있다.	5
	주어진 조건(두 함수가 동일한 점에서 동일한 접선을 가짐)을 이용해 방정식을 구할 수 있다.	3
	로그의 성질을 이용하여 방정식을 적절히 변형하고, 조건을 충족하는 값을 구할 수 있다.	3
	적절한 대입을 통해 변수 a를 결정하고, 이를 올바르게 해석할 수 있다.	4
	주어진 조건을 적용하여 $h'(2)$값을 정확히 구할 수 있다.	3

7. 예시 답안 혹은 정답

[답안 1-1](8점)

이차함수 $y=2x^2-5(n+2)x+3a_n$의 그래프가 x축과 만나므로 이차방정식 $2x^2-5(n+2)x+3a_n=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=25(n+2)^2-24a_n \geq 0$

즉, $a_n \leq \dfrac{25(n+2)^2}{24}$ --①

---[2점]

이차함수 $y=2x^2-5nx+3a_n$의 그래프는 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $2x^2-5nx+3a_n=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=25n^2-24a_n<0$

즉, $a_n>\dfrac{25n^2}{24}$ --②

---[2점]

①, ②에서 $\dfrac{25n^2}{24}<a_n \leq \dfrac{25(n+2)^2}{24}$

---[2점]

$\dfrac{25n^2}{24n^2}<\dfrac{a_n}{n^2}\leq\dfrac{25(n+2)^2}{24n^2}$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{25n^2}{24n^2}=\dfrac{25}{24}$이고, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{25(n+1)^2}{24n^2}=\dfrac{25}{24}$이므로 수열의 극한의 대소관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{25n^2}{24n^2}=\dfrac{25}{24}$

---[2점]

---[총 8점]

[답안 1-2](10점)

(1) $f'(x)=e^x+(x-5)e^x=(x-4)e^x$이므로

점 $(k,(k-5)e^k)$에서의 접선의 방정식은

$y=(k-4)e^k(x-k)+(k-5)e^k$

---[3점]

(2) $f'(x)=(x-4)e^x$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=4$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-e^4$	$\nearrow$

따라서, $f(x)$는 $x=4$에서 극소이고 극솟값은 $f(4)=-e^4$이다.

--[3점]

(3) 이 접선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$-(k-5)e^k=(k-4)e^k(a-k)$

방정식을 정리하면 $k^2-(a+5)k+4a+5=0$ ---------------------------①

--[2점]

이차방정식 ①이 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으므로

①의 판별식을 D라 하면

$D=(a+5)^2-4(4a+5)=a^2-6a+5=(a-1)(a-5)>0$ 에서 $a<1$ 또는 $a>5$

--[2점]

--[총 10점]

[답안 1-3](14점)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3n+2k}f\left(3+\frac{2k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+\frac{2k}{n}}f\left(3+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$$

--[4점]

제시문 다)에서, $3+\frac{2k}{n}=x_k$라 하면 $\frac{2}{n}=\Delta x$, $a=3$, $b=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+\frac{2k}{n}}f\left(3+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}f(x_k)\,\Delta x=\int_3^5\frac{1}{x}f(x)dx=\int_3^5\frac{\ln 3x}{x}dx$$

--[5점]

$t=\ln 3x$라 하면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ 이고,

$x=3$일 때, $t=\ln 9$, $x=5$일 때, $t=\ln 15$이다.

따라서, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3n+2k}f\left(3+\frac{2k}{n}\right)=\int_{\ln 9}^{\ln 15}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\ln 9}^{\ln 15}=\frac{(\ln 15)^2-(\ln 9)^2}{2}$

[참고] 위의 해는 다음과 같은 결과 등 다양한 형태로도 나타날 수 있다.

$$\frac{(\ln 15)^2-(\ln 9)^2}{2}=\frac{(\ln 15+\ln 9)(\ln 15-\ln 9)}{2}$$

$$=\frac{(\ln 5+3\ln 3)(\ln 5-\ln 3)}{2}=\frac{(\ln 5)^2+2\ln 5\ln 3-3(\ln 3)^2}{2}$$

--[5점]

---[총 14점]

[다른 풀이]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3n+2k}f\left(3+\frac{2k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3+\dfrac{2k}{n}}f\left(3+\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

---[4점]

제시문 다)에서, $\dfrac{k}{n}=x_k$라 하면 $\dfrac{1}{n}=\varDelta x$, $a=0$, $b=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3+\dfrac{2k}{n}}f\left(3+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+2x_k}f(3+2x_k)\varDelta x=\int_0^1\frac{1}{3+2x}\ln(9+6x)dx$$

$3+2x=y$라 하면 $2dx=dy$이고,

$x=0$일 때, $y=3$, $x=1$일 때, $y=5$이다.

따라서, $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{3+2x}\ln(9+6x)dx=\int_3^5\frac{\ln 3y}{y}dy$

---[5점]

$\ln 3y=t$라 하면 $\dfrac{1}{y}dy=dt$이고,

$y=3$일 때, $t=\ln 9$, $y=5$일 때, $t=\ln 15$이다.

따라서, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3n+2k}f\left(3+\frac{2k}{n}\right)=\int_{\ln 9}^{\ln 15}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\ln 9}^{\ln 15}=\frac{(\ln 15)^2-(\ln 9)^2}{2}$

[참고] 위의 해는 다음과 같은 결과로도 나타낼수 있다.

$$\frac{(\ln 15)^2-(\ln 9)^2}{2}=\frac{(\ln 15+\ln 9)(\ln 15-\ln 9)}{2}$$
$$=\frac{(\ln 5+3\ln 3)(\ln 5-\ln 3)}{2}=\frac{(\ln 5)^2+2\ln 5\ln 3-3(\ln 3)^2}{2}$$

---[5점]
---[총 14점]

[답안 1-4](18점)

(1) 교점의 개수: 1

---[5점]

(2) 곡선 $f(x)=(4t^4+3t^2+1)\ln(x-t)$가 곡선 $g(x)=3e^{2x-a}$과 오직 한점 A에서 만나고 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 일치하므로 점 A의 x좌표를 k라 하면

$\left(4t^4+3t^2+1\right)\ln(k-t)=3e^{2k-a}$ ------------------------------------ (ㄱ)

$\dfrac{4t^4+3t^2+1}{k-t}=6e^{2k-a}$ ------------------------------------ (ㄴ)

--[3점]

(ㄱ), (ㄴ)에서 $\left(4t^4+3t^2+1\right)\ln(k-t)=\dfrac{4t^4+3t^2+1}{2(k-t)}$이고 $t>0$이므로

$\ln(k-t)=\dfrac{1}{2(k-t)}$

--[3점]

$\ln x=\dfrac{1}{2x}$의 해를 α라 하면 $k-t=\alpha$를 만족한다.

$k=t+\alpha$--(ㄷ)

(ㄷ)을 (ㄴ)에 대입하면

$\dfrac{4t^4+3t^2+1}{\alpha}=6e^{2(t+\alpha)-a}$, $e^{2(t+\alpha)-a}=\dfrac{4t^4+3t^2+1}{6\alpha}$

$2(t+\alpha)-a=\ln\left(\dfrac{4t^4+3t^2+1}{6\alpha}\right)$

따라서, $a=2(t+\alpha)-\ln\left(\dfrac{4t^4+3t^2+1}{6\alpha}\right)$

--[4점]

$h(t)=2(t+\alpha)-\ln\left(\dfrac{4t^4+3t^2+1}{6\alpha}\right)$

$h'(t)=2-\dfrac{\dfrac{16t^3+6t}{6\alpha}}{\dfrac{4t^4+3t^2+1}{6\alpha}}=2-\dfrac{16t^3+6t}{4t^4+3t^2+1}$

$h'(2)=2-\left(\dfrac{140}{77}\right)=\dfrac{14}{77}=\dfrac{2}{11}$

--[3점]

--[총 18점]

[다른 풀이]

(2) 곡선 $f(x)=\left(4t^4+3t^2+1\right)\ln(x-t)$가 곡선 $g(x)=3e^{2x-a}$과 오직 한점 A에서 만나고 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 일치하므로 점 A의 x좌표를 k라 하면

$\left(4t^4+3t^2+1\right)\ln(k-t)=3e^{2k-a}$ ------------------------------------(ㄱ)

$\dfrac{4t^4+3t^2+1}{k-t}=6e^{2k-a}$ ------------------------------------ (ㄴ)

--[3점]

$\ln\left(\dfrac{4t^4+3t^2+1}{6(k-t)}\right)=2k-a$

$a=2k-\ln\left(\dfrac{4t^4+3t^2+1}{6(k-t)}\right)$ ---------------------------------- (ㄷ)

---[3점]

$\ln x=\dfrac{1}{2x}$의 해를 α라 하면 $k-t=\alpha$를 만족한다.

$k=t+\alpha$ --(ㄹ)

(ㄹ)을 (ㄷ)에 대입하면

따라서, $a=2(t+\alpha)-\ln\left(\dfrac{4t^4+3t^2+1}{6\alpha}\right)$

---[4점]

$h(t)=2(t+\alpha)-\ln\left(\dfrac{4t^4+3t^2+1}{6\alpha}\right)$

$h'(t)=2-\dfrac{\dfrac{16t^3+6t}{6\alpha}}{\dfrac{4t^4+3t^2+1}{6\alpha}}=2-\dfrac{16t^3+6t}{4t^4+3t^2+1}$

$h'(2)=2-\left(\dfrac{140}{77}\right)=\dfrac{14}{77}=\dfrac{2}{11}$

---[3점]

---[총 18점]

[논술고사 공학계열 2번]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	공학계열(수학) / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I
	핵심개념 및 용어	다항식, 삼각함수
예상 소요 시간	45분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 대한 풀이 과정과 답을 제시하시오.(답만 기재하면 0점 처리)

가) 항등식의 뜻과 성질을 이용하여 등식에서 미지의 계수와 상수항을 정하는 방법을 미정계수법이라고 한다.

나) 삼각형 ABC에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\sin B}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}$$

다) 삼각형 ABC에 대하여 다음이 성립한다.

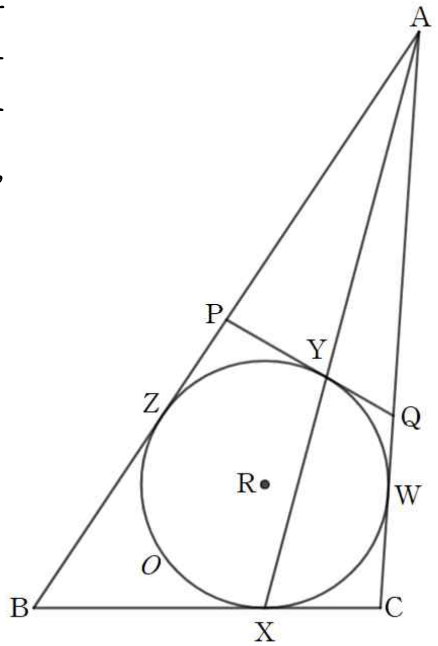
$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-2\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\cos C$$
$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2-2\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\cos A$$
$$\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos B$$

[문제 2-1] 최고차항의 계수가 $a(a\neq 0)$인 삼차식 $f(x)$와 세 실수 α, β, γ가 다음을 만족한다.

$$f(x)-5x+6=a(x-2)(x-3)(x-\alpha)$$
$$f(x)-6x+8=a(x-2)(x-4)(x-\beta)$$
$$f(x)-7x+12=a(x-3)(x-4)(x-\gamma)$$

$\alpha+\beta+\gamma=24$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

[문제 2-2] 그림과 같이 삼각형 ABC에 중심이 R인 원 O가 세 점 X, W, Z에서 접한다. 선분 AX가 원 O와 만나는 점 중 X가 아닌 점을 Y라 하고 점 Y에서의 접선이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{AP}=3$, $\overline{PB}=3$, $\overline{AC}=5$일 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) $\angle PYX = \angle YXB$임을 보이시오.

(2) 제시문 나)를 이용하여 $\overline{ZP}=1$임을 보이시오.

(3) 제시문 다)를 이용하여 $\overline{WQ}$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

수학에서 항등식은 등식의 일종으로 등식 내부의 특정한 변수가 어떤 값으로 변하든 항상 참인 등식이다. 항등식의 뜻과 성질을 이용하여 미지의 계수와 상수항을 정하는 방법을 미정 계수법이라고 한다. 실수 계수의 다항식에서 항등식의 의미를 이해하고 있는지를 물어보는 문제이다.
사인법칙과 코사인법칙의 정의를 이해하고 이를 적용하여 선분의 길이를 구하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
제시문	[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. [12수학I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-1	[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.
문제 2-2	[12수학I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외	좋은책신사고	2018	22-32
	수학	배종숙 외	금성출판사	2018	25-42
	수학	김원경 외	비상	2018	24-35
	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	22-29
	수학	황선욱 외	미래엔	2018	26-41
	수학I	이준열 외	천재교육	2018	97-111
	수학I	류희찬 외	천재교과서	2018	97-110
	수학I	배종숙 외	금성출판사	2018	97-111
	수학I	김원경 외	비상	2018	95-107
	수학I	홍성복 외	지학사	2018	94-107
	수학I	황선욱 외	미래엔	2018	97-111
	수학I	고성은 외	좋은책신사고	2018	92-104

5. 문항 해설

[문제 2-1] 항등식의 정의를 이용하여 α, β, γ를 a에 대한 관계식으로 표현할 수 있는지를 물어보는 문제이다.
[문제 2-2] 삼각형에 내접하는 원이 존재하는 경우 삼각형에 존재하는 점들 사이의 거리를 사인법칙과 코사인법칙을 사용하여 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
2-1	$f(2)=4$, $f(3)=9$, $f(4)=16$을 구할 수 있다.	3
	$\alpha=4-\frac{1}{a}$을 구할 수 있다.	3
	$\beta=3-\frac{1}{a}$을 구할 수 있다.	3
	$\gamma=2-\frac{1}{a}$을 구할 수 있다.	3
	$a=-\frac{1}{5}$을 구할 수 있다.	5
	$f(0)=\frac{24}{5}$을 구할 수 있다.	4
2-2	$\angle\mathrm{PYX}=\angle\mathrm{YXB}$ 임을 보일 수 있다.	3
	$\frac{\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{PY}}}=\frac{\sin\angle\mathrm{PYA}}{\sin\angle\mathrm{PAY}}$ 임을 구할 수 있다.	1.5
	$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BX}}}=\frac{\sin\angle\mathrm{AXB}}{\sin\angle\mathrm{BAX}}$ 임을 구할 수 있다.	1.5
	$\sin\angle\mathrm{PYA}=\sin(\pi-\angle\mathrm{PYX})$ $=\sin\angle\mathrm{PYX}$ $=\sin\angle\mathrm{YXB}$ $=\sin\angle\mathrm{AXB}$ 의 관계식을 구할 수 있다.	3
	$\overline{\mathrm{ZP}}=\overline{\mathrm{PY}}=1$의 값을 구할 수 있다.	4
	$\overline{\mathrm{BC}}=2+1=3$의 값을 구할 수 있다.	3
	$\overline{\mathrm{WQ}}=\overline{\mathrm{YQ}}=y$라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=1+y$, $\overline{\mathrm{AQ}}=4-y$의 관계식을 구할 수 있다.	2
	$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}{2\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{6^2+5^2-3^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{13}{15}$의 구할 수 있다.	3
	$\cos\angle\mathrm{PAQ}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{AQ}}^2-\overline{\mathrm{PQ}}^2}{2\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AQ}}}=\frac{3^2+(4-y)^2-(1+y)^2}{2\cdot 3\cdot(4-y)}=\frac{12-5y}{12-3y}$의 구할 수 있다.	3
	$y=\overline{\mathrm{WQ}}=\frac{2}{3}$의 값을 구할 수 있다.	5

7. 예시 답안 혹은 정답

[답안 2-1]

주어진 세 관계식으로부터 $f(2)=4$, $f(3)=9$, $f(4)=16$을 얻을 수 있다.
--(3점)

$f(x)$가 최고차항의 계수가 a인 삼차식이므로 $f(x)=a(x-2)(x-3)(x-4)+x^2$

또는 $f(x)=ax^3+(1-9a)x^2+26ax-24a$

$f(x)-5x+6=a(x-2)(x-3)(x-\alpha)$에 $x=4$를 대입하면 $\alpha=4-\dfrac{1}{a}$

---------------------------------------(3점)

$f(x)-6x+8=a(x-2)(x-4)(x-\beta)$에 $x=3$을 대입하면 $\beta=3-\dfrac{1}{a}$

---------------------------------------(3점)

$f(x)-7x+12=a(x-3)(x-4)(x-\gamma)$에 $x=2$를 대입하면 $\gamma=2-\dfrac{1}{a}$

---------------------------------------(3점)

$\alpha+\beta+\gamma=24=4-\dfrac{1}{a}+3-\dfrac{1}{a}+2-\dfrac{1}{a}$ 이므로 $a=-\dfrac{1}{5}$

---------------------------------------(5점)

따라서, $f(x)=-\dfrac{1}{5}(x-2)(x-3)(x-4)+x^2=-\dfrac{1}{5}x^3+\dfrac{14}{5}x^2-\dfrac{26}{5}x+\dfrac{24}{5}$

$f(0)=-\dfrac{1}{5}(-2)(-3)(-4)+0^2=\dfrac{24}{5}$

---------------------------------------(4점)

[답안 2-2]

(1) $\angle\mathrm{PYX}=\angle\mathrm{YXB}$임을 보이시오.

$\angle\mathrm{RYP}=\angle\mathrm{RXB}=90^\circ$ 이고 $\angle\mathrm{RYX}=\angle\mathrm{RXY}$이므로 $\angle\mathrm{PYX}=\angle\mathrm{YXB}$

---------------------------------------(3점)

(2) 제시문 나)를 이용하여 $\overline{\mathrm{ZP}}=1$임을 보이시오.

$\overline{\mathrm{ZP}}=\overline{\mathrm{PY}}=x$라 하자.

삼각형 APY에서 사인법칙을 이용하면,

$\dfrac{\sin\angle\mathrm{PAY}}{\overline{\mathrm{PY}}}=\dfrac{\sin\angle\mathrm{PYA}}{\overline{\mathrm{PA}}}$ 이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{PY}}}=\dfrac{\sin\angle\mathrm{PYA}}{\sin\angle\mathrm{PAY}}$

---------------------------------------(1.5점)

삼각형 AXB에서 사인법칙을 이용하면,

$\dfrac{\sin\angle\mathrm{BAX}}{\overline{\mathrm{BX}}}=\dfrac{\sin\angle\mathrm{AXB}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ 이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BX}}}=\dfrac{\sin\angle\mathrm{AXB}}{\sin\angle\mathrm{BAX}}$

---------------------------------------(1.5점)

$\angle\mathrm{PAY}=\angle\mathrm{BAX}$이고,

$\sin\angle\mathrm{PYA}=\sin(\pi-\angle\mathrm{PYX})=\sin\angle\mathrm{PYX}=\sin\angle\mathrm{YXB}=\sin\angle\mathrm{AXB}$ 이므로,

--(3점)

$$\frac{3}{x}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PY}}=\frac{\sin\angle PYA}{\sin\angle PAY}=\frac{\sin\angle AXB}{\sin\angle BAX}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BX}}=\frac{6}{3-x}$$

$$\frac{3}{x}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PY}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BX}}=\frac{6}{3-x}$$

따라서, $x=\overline{ZP}=\overline{PY}=1$

--(4점)

(3) 제시문 다)를 이용하여 $\overline{WQ}$의 값을 구하시오.

$\overline{ZB}=3-x=2=\overline{BX}$

$\overline{AZ}=x+3=4=\overline{AW}$

$\overline{WC}=5-\overline{AW}=1=\overline{XC}$

따라서, $\overline{BC}=2+1=3$

--(3점)

$\overline{WQ}=\overline{YQ}=y$라 할 때,

$\overline{PQ}=1+y$, $\overline{AQ}=4-y$

--(2점)

삼각형 BAC에서 코사인법칙을 이용하면,

$$\cos\angle BAC=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AB}\,\overline{AC}}=\frac{6^2+5^2-3^2}{2\times6\times5}=\frac{13}{15}$$

--(3점)

삼각형 PAQ에서 코사인법칙을 이용하면,

$$\cos\angle PAQ=\frac{\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-\overline{PQ}^2}{2\overline{AP}\,\overline{AQ}}=\frac{3^2+(4-y)^2-(1+y)^2}{2\times3\times(4-y)}=\frac{12-5y}{12-3y}$$

--(3점)

$\cos\angle BAC=\cos\angle PAQ$이므로,

$$\frac{13}{15}=\frac{12-5y}{12-3y}$$

$$y=\overline{WQ}=\frac{2}{3}$$

--(5점)