2026학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연오전]

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="3">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="3">논술(논술우수자)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">해당 대학의 계열(과목)</td><td rowspan="2">자연계열</td><td rowspan="2">문항번호</td><td>■ 오전 □ 오후</td></tr>
<tr><td>■ 1번 □ 2번 □ 3번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td colspan="2">수학, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td colspan="2">정적분, 미분과 적분의 관계, 치환적분법</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="3">30분 / 전체 100분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

(1-1) 연속함수에 관련된 적분의 성질을 이해하고 기본적인 삼각함수에 관한 적분을 계산할 수 있는지 평가한다.
(1-2) 연속함수와 관련된 적분의 성질을 이해하고 미분과 적분의 관계, 치환적분법을 이용하여 주어진 미분 또는 적분으로 주어진 조건을 만족하는 함수를 찾을 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	■ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 □ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ ■ 미적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (가)	[수학] - (3) 수와 연산 - ② 명제 [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
제시문 (나)	[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 (1-1)	[수학] - (3) 수와 연산 - ② 명제 [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
	[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문항 (1-2)	[수학] - (3) 수와 연산 - ② 명제 [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
	[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	교학사	2020	198-203
	수학	이준열 외	천재교육	2020	209-213
	미적분	권오남 외	교학사	2020	173-175
	미적분	이준열 외	천재교육	2020	168-171
	미적분	권오남 외	교학사	2020	138-164
	미적분	이준열 외	천재교육	2020	138-162

5. 문항 해설

(1-1) 산술평균과 기하평균의 관계 및 제시문을 이용하여 주어진 적분이 최대일 때의 함수를 찾고 적분값을 구한다.
(1-2) 산술평균과 기하평균의 관계와 조건 (ⅱ) 및 치환적분법을 이용하면 적분이 가질 수 있는 최솟값을 찾는다. 산술평균과 기하평균의 관계 및 제시문을 이용하여 적분이 최소일 때의 함수를 구체적으로 찾는다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	$f(x)$가 양수일 때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 적분값을 구하면	7점
	등호 조건을 만족하는 함수를 정확히 구하면	8점
	절댓값을 제대로 처리하지 못하면	최대 3점 감점
(1-2)	산술평균과 기하평균의 관계 및 치환적분법을 이용하여 최소가 되는 적분값을 정확히 구하면	5점
	등호 조건을 정확히 해석하면 (절댓값 처리 포함)	4점
	적분값이 최소가 되는 $f(x)$를 정확히 구하면	6점
	조건 (ⅰ)를 이용하여 절댓값을 처리하는 것을 잊으면	최대 3점 감점

7. 예시 답안

(1-1) 제시문 (가)에 의해

$$2=\int_{-1}^{1}\{2(f(x))^2+\sin^2\pi x\}dx \geq \int_{-1}^{1}2|\sqrt{2}f(x)\sin\pi x|dx \geq \int_{-1}^{1}2\sqrt{2}f(x)|\sin\pi x|dx$$

이다. $|\sqrt{2}f(x)|=|\sin\pi x|$이면 첫 번째 부등식에서 등호가 성립하고, $|f(x)|=f(x)$이면 두 번째 부등식에서 등호가 성립한다. 역으로 등호가 성립하면

$$\begin{aligned}0&=\int_{-1}^{1}\{2(f(x))^2+\sin^2\pi x\}dx-\int_{-1}^{1}2\sqrt{2}f(x)|\sin\pi x|dx\\&=\int_{-1}^{1}(\sqrt{2}f(x)-|\sin\pi x|)^2dx\end{aligned}$$

이다. 제시문 (나)에 의해서 함수 $(\sqrt{2}f(x)-|\sin\pi x|)^2$는 반드시 구간 $[-1,1]$에서 상수이어야 하고 또한 0이어야 하므로 반드시 $\sqrt{2}f(x)=|\sin\pi x|$이어야 한다.

따라서 $f(x)=\dfrac{|\sin\pi x|}{\sqrt{2}}$이고 구하고자 하는 적분의 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(1-2) 제시문 (가)와 치환적분 및 조건 (ⅰ), (ⅱ)에 의해

$$\int_0^2\left\{(2e^xf'(x))^2+\frac{1}{(e^xf(x))^2}\right\}dx \geq \int_0^2 4\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|dx = -4\int_0^2\frac{f'(x)}{f(x)}dx = -4[\ln f(x)]_0^2=8$$

이 성립한다. 등호가 성립할 때는 구간 $[0,2]$에서 $|2f'(x)f(x)|=e^{-2x}$이 성립할 때이고,

정적분의 최솟값은 8이다. 조건 (ⅰ)에 의해 $-2f'(x)f(x)=e^{-2x}$이다. 따라서 구간 $[0,2]$에서 $\left((f(x))^2-\dfrac{e^{-2x}}{2}\right)'=0$이다. 조건 (ⅱ) 및 정적분과 부정적분의 관계로부터 $0\leq x\leq 2$인 실수 x에 대하여 $(f(x))^2-\dfrac{e^{-2x}}{2}=\displaystyle\int_0^x 0\,dx=0$이고 $f(x)>0$이므로 $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2}}$ $(0\leq x\leq 2)$이다.

이제 이 함수가 등호 조건을 만족하는 유일한 함수임을 보이자. 등호 조건으로부터

$$\begin{aligned}0&=\int_0^2\left\{(2e^xf'(x))^2+\frac{1}{(e^xf(x))^2}\right\}dx-\int_0^2 4\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|dx\\&=\int_0^2\left(|2e^xf'(x)|-\left|\frac{1}{e^xf(x)}\right|\right)^2dx\end{aligned}$$

이므로 제시문 (나)에 의해 $\left|2e^x f'(x)\right| - \left|\dfrac{1}{e^x f(x)}\right| = 0$ 이고 이를 정리하면 위의 조건을 만족하는 함수는 유일하다. 따라서 $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\, e}$ 이고 정적분의 값은 8이다.

2026학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연오전]

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="3">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="3">논술(논술우수자)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">해당 대학의 계열(과목)</td><td rowspan="2">자연계열</td><td rowspan="2">문항번호</td><td>■ 오전 □ 오후</td></tr>
<tr><td>□ 1번 ■ 2번 □ 3번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td colspan="2">수학Ⅱ, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td colspan="2">극한, 연속, 미분가능</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="3">35분 / 전체 100분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

(2-1) 함수의 연속의 정의를 이해하고 있는지 평가한다.
(2-2) 함수의 미분의 정의를 이해하고 있는지 평가한다.
(2-3) 미분의 정의와 도함수의 연속성의 차이를 이해하고 함수의 극한을 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	■ 교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정" □ 수학 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ■ 미적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{1}$ 미분계수 [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
(2-1)	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
(2-2)	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{1}$ 미분계수 [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
(2-3)	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{2}$ 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2020	8-44, 52-65
	수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2020	10-43, 52-59
	미적분	권오남 외	교학사	2020	54-59
	미적분	이준열 외	천재교육	2020	55-60

5. 문항 해설

(2-1) 연속의 정의를 사용하여 함수의 곱이 연속함수가 될 조건을 찾는다.

(2-2) 미분계수의 정의를 사용하여 함수의 곱이 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 조건을 찾는다.

(2-3) 구간별로 주어진 다항식을 미분하여 극한값을 구하고, (2-2)에서 구한 함수를 이용하여 극한을 구한다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	$g(x)$가 $x=0$에서만 불연속임을 확인하면	3점
	$f(x)$를 구하면	3점
	구한 $f(x)$의 차수가 최소이고 $f(x)g(x)$가 연속임을 확인하면	4점
(2-2)	$g(x)$가 $x=-1,0,1$에서만 미분가능하지 않음을 확인하면	5점
	$f(x)$를 구하면	3점
	구한 $f(x)$의 차수가 최소이고 $f(x)g(x)$가 미분가능함을 확인하면	7점
(2-3)	$\lim_{x\to 1-}(f(x)g(x))'$을 구하면	3점
	$\lim_{x\to 1+}(f(x)g(x))'$을 구하면	3점
	$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\lvert f(x)\rvert)}{\ln x}$를 구하면	4점

7. 예시 답안

(2-1) $g(x)$는 $x\neq 0$일 때, 연속이다. 따라서 임의의 다항식 $f(x)$에 대해서 $f(x)g(x)$는 $x\neq 0$에서 연속이다. 또한 만일 $f(0)\neq 0$이고 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이면

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\frac{\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)}{\lim_{x\to 0-}f(x)}=\frac{\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)}{\lim_{x\to 0+}f(x)}=\lim_{x\to 0+}g(x)$$

가 되어 $g(x)$가 $x=0$에서 연속임을 의미하므로 $f(0)=0$이어야 한다. 그러므로 주어진 조건으로부터 다항식 $f(x)$는 $f(x)=x^n h(x)$ ($n\geq 1$, $h(x)$는 $h(0)\neq 0$인 다항식)의 형태이어야 한다. $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-}x^n(x+1)h(x)=0=\lim_{x\to 0+}x^{n-1}h(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)$$

이다. 따라서 $n\geq 2$이고 $f(x)$의 차수는 2 이상이다. $f(x)=x^2$이 $f(2)=4$와 문제의 조건을 만족하므로 이 함수가 구하려는 다항함수이다.

(2-2) $g(x)$는 $x=-1,0,1$ 이외의 모든 실수에서 미분가능하다. 임의의 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)g(x)$는 $x=-1,0,1$ 이외의 실수에서 미분가능하다. (2-1)로부터 $f(0)=0$이다. $f(1)\neq 0$이라고 가정하자. $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1-}\left(\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{f(x)(x-1)}-\frac{f(x)g(1)-f(1)g(1)}{f(x)(x-1)}\right)\\&=\lim_{x\to 1-}\left(\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{f(x)(x-1)}\right)-\frac{f'(1)g(1)}{f(1)}\\&=\lim_{x\to 1+}\left(\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{f(x)(x-1)}\right)-\frac{f'(1)g(1)}{f(1)}=\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\end{aligned}$$

이다. 따라서 제시문에 의하여 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 모순이다. 그러므로 $f(1)=0$이고 마찬가지 방법으로 $f(-1)=0$이다.

따라서 $f(x)=x^a(x-1)^b(x+1)^c h(x)$ $(a,\, b,\, c \geq 1,$ $h(x)$는 $h(-1)h(0)h(1) \neq 0$인 다항함수)이다.

(i) $x=-1$에서 미분가능할 필요충분조건은 제시문에 의하여 다음 두 극한값이 같은 것이다.

$$\lim_{x \to -1-} \frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x+1} = -f(-1)$$

$$\lim_{x \to -1+} \frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x+1} = f(-1)$$

따라서 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능할 필요충분조건은 $c \geq 1$이다.

(ii) $x=0$에서 미분가능한 함수는 연속이므로 (2-1)로부터 $a \geq 2$임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} x^{a-2}(x-1)^b(x+1)h(x)$$

이다. 제시문에 의하여 두 값이 같아야 하므로 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능할 필요충분조건은 $a \geq 3$이다.

(iii) $x=1$에서 미분가능할 필요충분조건은 제시문에 의하여 다음 두 극한값이 같은 것이다.

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} x^2(x-1)^{b-1}(x+1)h(x)$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} x^4(x-1)^{b-1}(x+1)h(x)$$

따라서 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 필요충분조건은 $b \geq 1$이다.

그러므로 주어진 조건 $f(2)=4$를 만족하는 다항함수 $f(x)$는 $h(x)=\frac{1}{6}$일 때

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3(x-1)(x+1)$$

이다.

(2-3) $x=1$ 근처에서 $f(x)g(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)g(x)=\begin{cases} \frac{1}{6}x^2(x^2-1)\ (0<x \leq 1) \\ \frac{1}{6}x^4(x^2-1)\ (x>1) \end{cases}$$

따라서

$$\lim_{x \to 1-}(f(x)g(x))' = \lim_{x \to 1-}\left\{\frac{1}{3}x(x^2-1)+\frac{1}{3}x^3\right\} = \frac{1}{3},\ \lim_{x \to 1+}(f(x)g(x))' = \lim_{x \to 1+}\left\{\frac{2}{3}x^3(x^2-1)+\frac{1}{3}x^5\right\} = \frac{1}{3}$$

이다. $f(x)=\frac{1}{6}x^3(x-1)(x+1)$이므로 구하고자 하는 값은 다음과 같다.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+|f(x)|)}{\ln x} = \lim_{x \to \infty} \frac{5\ln x + \ln\left(\frac{1}{x^5}+\left|\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right|\right)}{\ln x} = 5$$

2026학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연오전]

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="4">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="4">논술(논술우수자)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">해당 대학의 계열(과목)</td><td rowspan="2">자연계열</td><td rowspan="2">문항번호</td><td colspan="2">■ 오전 □ 오후</td></tr>
<tr><td colspan="2">□ 1번 □ 2번 ■ 3번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td colspan="3">수학, 수학Ⅱ</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td colspan="3">평균변화율, 도함수</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="4">35분 / 전체 100분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

주어진 문제의 조건을 만족하는 사차함수의 개형을 파악하고 도함수를 구할 수 있는지 평가한다.

(3-1) 평균변화율과 순간변화율의 차를 구할 수 있는지 평가한다.

(3-2) 간단한 삼차방정식을 풀 수 있는지 평가한다.

(3-3) 주어진 조건을 만족하는 사차함수의 도함수를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	■ 교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정” ■ 수학 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ □ 미적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학] - (1) 문자와 식 - 1 다항식의 연산 [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.
문항 (3-1)	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 1 미분계수 [12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다.
문항 (3-2)	[수학] - (1) 문자와 식 - 6 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.
문항 (3-3)	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 2 도함수 [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외	동아출판	2020	14, 73
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2020	14, 73
	수학Ⅱ	홍석복 외	지학사	2020	54, 65
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2020	54, 63

5. 문항 해설

이 문항은 사차함수에 대하여 주어진 조건과 필요충분조건을 파악하여 사차함수를 구하는 문제이다.

(3-1) 평균변화율로 정의된 $g(x)$와 도함수 $f'(x)$의 차를 계산한다.

(3-2) $g(x)=0$의 근이 만족하는 조건을 확인한 후, $f(x)$의 삼차항의 계수가 1일 때, $g(x)=0$의 근을 모두 구한다.

(3-3) 추가로 주어진 조건에 의하여 $g(x)=0$의 한 근을 확인하여, 주어진 조건을 만족하는 $g(x)$를 모두 구한 후, 도함수 $f'(x)$를 구한다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	$g(x)$를 전개하면	5점
	$4x+a$를 구하면	5점
	$4x+a$를 구했더라도 $g(x)$를 전개하지 않았으면	전체 0점
(3-2)	상자 조건과 필요충분조건인 $g(k+1)g(k-1) \geq 0$을 기술하면	3점
	$g(x)=0$은 이웃한 두 정수해를 가지는 것을 보이면	3점
	나머지 근 α의 범위가 $n-1 \leq \alpha \leq n+2$임을 보이면	3점
	$a=1$일 때 방정식 $g(x)=0$의 근을 구하면	1점
(3-3)	$g\left(\frac{5}{4}\right)=0$임을 보이면	3점
	$g(x)=4(x-n)(x-n-1)\left(x-\frac{5}{4}\right)$를 구하면	3점
	$n=0,\ 1,\ 2$임을 보이면	3점
	a를 n에 관한 식으로 나타내면	3점
	$f'(x)=4x^3-9x^2+x+3$을 구하면	1점
	$f'(x)=4x^3-17x^2+19x-\frac{13}{3}$을 구하면	1점
	$f'(x)=4x^3-25x^2+45x-\frac{65}{3}$를 구하면	1점

7. 예시 답안

(3-1) $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하자.

$$g(x)=\frac{f(x+1)-f(x-1)}{2}=\frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{2}+a\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{2}$$

$$+b\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{2}+c\frac{(x+1)-(x-1)}{2}+d(1-1)$$

$$=\left(4x^3+4x\right)+a\left(3x^2+1\right)+2bx+c=f'(x)+(4x+a)$$

그러므로 $g(x)-f'(x)=4x+a$이다.

(3-2) 함수 $f(x)$는 모든 정수 k에 대하여

$$f(k-2) \leq f(k) \leq f(k+2) \text{ 또는 } f(k-2) \geq f(k) \geq f(k+2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

을 만족하고, $2g(k)=f(k+1)-f(k-1)$이므로

$$-2g(k-1) \leq 0 \leq 2g(k+1) \text{ 또는 } -2g(k-1) \geq 0 \geq 2g(k+1)$$

이다. 그러므로 함수 $g(x)$는 모든 정수 k에 대하여

$$g(k+1)g(k-1) \geq 0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

를 만족하고, ㉡은 ㉠이기 위한 필요충분조건이다.

$g(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로 $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$이고 $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$이다. 그러므로 $g(2i) = 0$을 만족하는 정수 i와 $g(2j+1) = 0$을 만족하는 정수 j가 존재한다. 두 정수해 $2i$와 $2j+1$의 차이가 3 이상인 경우 $g(2i-1)g(2i+1) < 0$ 또는 $g(2j)g(2j+2) < 0$이 되어 모순이므로, 두 정수해는 이웃하는 정수이고 이를 n, $n+1$이라 하자. 삼차방정식 $g(x) = 0$의 나머지 해 α가 $\alpha < n-1$ 또는 $n+2 < \alpha$이면 $k-1 < \alpha < k+1$이고 $g(k+1)g(k-1) < 0$인 k가 존재하여 모순이므로

$$n-1 \le \alpha \le n+2 \qquad \cdots\cdots \text{ⓒ}$$

이다. 그러므로 방정식 $g(x) = 0$은 이웃한 두 정수해를 가지고, 방정식 $g(x) = 0$의 임의의 두 근의 차는 2 이하이며, 이는 ㉠이기 위한 필요충분조건이다.

$a = 1$일 때, $g(x) = f'(x) + (4x+1)$이므로 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수는 4이고, 이차항의 계수는 3이다.

$$\begin{aligned} g(x) &= 4(x-n)(x-n-1)(x-\alpha) \\ &= 4x^3 - 4(2n+1+\alpha)x^2 + 4(n^2+n+2n\alpha+\alpha)x - 4n(n+1)\alpha \qquad \cdots\cdots \text{ⓓ} \end{aligned}$$

그러므로 $g(x)$의 이차항의 계수가 3이므로 $2n+1+\alpha = -\frac{3}{4}$이다. ⓒ에 의하여, $3n \le -\frac{3}{4} \le 3n+3$이고 $n = -1$, $\alpha = \frac{1}{4}$이다. 따라서 $g(x) = 4(x+1)x\left(x - \frac{1}{4}\right)$이고, 방정식 $g(x) = 0$의 근은 -1, 0, $\frac{1}{4}$이다.

(3-3) $g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \left(f\left(\frac{9}{4}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 0$이므로, $\alpha = \frac{5}{4}$이고 $g(x) = 4(x-n)(x-n-1)\left(x - \frac{5}{4}\right)$이다. ⓒ에 의하여 정수 n은 $n-1 \le \frac{5}{4} \le n+2$을 만족하므로 $n = 0$, 1, 2이다.

$f'(x) = g(x) - (4x+a)$에서 양변의 이차항의 계수를 비교하면, ⓓ에 의하여 $3a = -4\left(2n+1+\frac{5}{4}\right)$이므로

$$a = -\left(\frac{8}{3}n + 3\right)$$

이다. 그러므로 도함수 $f'(x)$는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x-n)(x-n-1)\left(x - \frac{5}{4}\right) - 4x + \left(\frac{8}{3}n + 3\right) \\ &= 4x^3 - (8n+9)x^2 + (4n^2+14n+1)x - \left(5n^2 + \frac{7}{3}n - 3\right) \end{aligned}$$

n에 따라서 도함수 $f'(x)$는 각각 다음과 같다.

$$n = 0:\ f'(x) = 4x(x-1)\left(x - \frac{5}{4}\right) - 4x + 3 = 4x^3 - 9x^2 + x + 3$$

$$n = 1:\ f'(x) = 4(x-1)(x-2)\left(x - \frac{5}{4}\right) - 4x + \frac{17}{3} = 4x^3 - 17x^2 + 19x - \frac{13}{3}$$

$$n = 2:\ f'(x) = 4(x-2)(x-3)\left(x - \frac{5}{4}\right) - 4x + \frac{25}{3} = 4x^3 - 25x^2 + 45x - \frac{65}{3}$$