2025학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연_오전]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후 ■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분	
	핵심개념 및 용어	정적분의 성질, 부분적분법	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

정적분의 성질에 대한 이해와 정적분의 계산 능력을 평가한다. 특히 주어진 적분 형태에 대해서 부분적분법을 적절히 적용할 수 있는지를 평가한다.

(1-1) 삼각함수의 성질을 활용하여 식을 적절히 변형하여 활용할 수 있는지 평가한다.

(1-2) 정적분의 부분적분법과 삼각함수의 성질을 활용하여 주어진 정적분 값을 계산할 수 있는지 평가한다.

(1-3) 정적분의 부분적분법과 삼각함수의 성질을 활용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	☐ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** ☐ 수학 ■ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ■ 미적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (가)	[미적분] - (1) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문 (나)	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용 [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 (1-1)	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다
문항 (1-2)	[미적분] - (2) - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [미적분] - (1) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 (1-3)	[미적분] - (1) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용 [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	고성은 외	좋은책 신사고	2020	73
	수학Ⅰ	박교식 외	동아출판	2020	70
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2020	136
	수학Ⅱ	김원경 외	비상교육	2020	127
	미적분	박교식 외	동아출판	2020	143
	미적분	김원경 외	비상교육	2020	137

5. 문항 해설

(1-1) 삼각함수의 성질을 활용하여 주어진 식의 값을 계산한다.

(1-2) 삼각함수의 덧셈정리와 부분적분법을 활용하여 주어진 정적분 값을 계산한다.

(1-3) 정적분의 부분적분법과 삼각함수의 성질을 활용하여 주어진 부등식을 증명한다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	삼각함수 공식 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$을 사용하면	3점
	삼각함수 공식 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$를 사용하면	3점
	$\frac{9}{2}$를 구하면	4점
(1-2)	삼각함수의 덧셈정리를 올바르게 사용하면	3점
	부분적분법을 사용하여 정적분 값을 구하면	7점
(1-3)	$f'(x)$와 $g(x)$와의 연관성을 표현하면	3점
	$f(0) = f(\pi) = 0$을 보이면	5점
	부분적분법을 사용하여 부등식을 증명하면	7점

7. 예시 답안

(1-1) 삼각함수의 성질 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$를 활용하면,

$$\sum_{n=1}^{8} \sin^2\frac{n\pi}{16} = \left(\sin^2\frac{\pi}{16} + \sin^2\frac{7\pi}{16}\right) + \left(\sin^2\frac{2\pi}{16} + \sin^2\frac{6\pi}{16}\right) + \left(\sin^2\frac{3\pi}{16} + \sin^2\frac{5\pi}{16}\right) + \sin^2\frac{4\pi}{16} + \sin^2\frac{8\pi}{16}$$

$$= \left(\sin^2\frac{\pi}{16} + \cos^2\frac{\pi}{16}\right) + \left(\sin^2\frac{2\pi}{16} + \cos^2\frac{2\pi}{16}\right) + \left(\sin^2\frac{3\pi}{16} + \cos^2\frac{3\pi}{16}\right) + \sin^2\frac{4\pi}{16} + \sin^2\frac{8\pi}{16}$$

$$= 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{2}$$

임을 알 수 있다.

(1-2) 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 $\int_0^\pi e^x \sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \sin\frac{x}{2}\,dx$이다. 제시문 (가)에 의하여

$$\int_0^\pi e^x \sin\frac{x}{2}\,dx = \left[e^x \sin\frac{x}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \cos\frac{x}{2}\,dx = e^\pi - \frac{1}{2}\left(\left[e^x \cos\frac{x}{2}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \sin\frac{x}{2}\,dx\right)$$

$$= e^\pi - \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \sin\frac{x}{2}\,dx\right)$$

이다. 식을 정리하면 $\frac{5}{4}\int_0^\pi e^x \sin\frac{x}{2}\,dx = e^\pi + \frac{1}{2}$이므로, 구하고자 하는 정적분 값은

$\int_0^\pi e^x \sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\,dx = \frac{2}{5}e^\pi + \frac{1}{5}$이다.

(1-3) $f(0) = 0$이고, 삼각함수의 성질 $\sin x = -\sin(2\pi - x)$에 의하여

$$f(\pi) = \sum_{n=1}^{16} \sin\frac{n\pi}{8} = \left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{15\pi}{8}\right) + \left(\sin\frac{2\pi}{8} + \sin\frac{14\pi}{8}\right) + \cdots + \left(\sin\frac{7\pi}{8} + \sin\frac{9\pi}{8}\right) + \sin\frac{8\pi}{8} + \sin\frac{16\pi}{8} = 0$$

이다. 또한 $f'(x)=\sum_{n=1}^{16}\frac{n}{8}\cos\frac{nx}{8}=\frac{1}{8}g(x)$이므로, 제시문 (가)에 의하여

$$\int_0^{\pi} e^x f(x)g(x)\,dx = 8\int_0^{\pi} e^x f(x)f'(x)\,dx = 8\left[e^x|f(x)|^2\right]_0^{\pi} - 8\int_0^{\pi} e^x f(x)f'(x)\,dx - 8\int_0^{\pi} e^x|f(x)|^2\,dx$$

이고, $\int_0^{\pi} e^x f(x)g(x)\,dx = -4\int_0^{\pi} e^x|f(x)|^2\,dx$이다. 이때 함수 $e^x|f(x)|^2 \geq 0$이고 상수함수가 아니므로, 제시문 (나)에 의하여 $\int_0^{\pi} e^x|f(x)|^2\,dx > 0$이므로, 주어진 부등식이 성립한다.

2025학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연_오전]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후 □ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분	
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 극댓값과 극솟값	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

극댓값, 극솟값의 개념을 이해하고, 미분가능한 함수가 극댓값과 극솟값을 갖는 점을 구할 수 있는지 평가한다.

(2-1) 극댓값, 극솟값의 개념을 이해하고, 삼각함수의 성질을 활용하여 함수가 극댓값, 극솟값을 갖는 점을 계산할 수 있는지 평가한다.

(2-2) 극댓값, 극솟값의 개념을 이해하고, 삼각함수의 성질을 활용하여 주어진 함수의 미분계수가 0이 되는 점들에 대하여, 각 점에서 극댓값, 극솟값을 갖는지 또는 둘 다 갖지 않는지 판단하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 ■ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ■ 미적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (가)	[수학Ⅱ] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 (나)	[수학] - (3) 수와 연산 - ② 명제 [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
문항 (2-1)	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [수학Ⅱ] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 (2-2)	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [수학Ⅱ] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	88
	수학Ⅱ	김원경 외	비상	2020	84
	수학	홍성복 외	지학사	2020	207
	수학	박교식 외	동아출판	2020	199

5. 문항 해설

(2-1) 삼각함수의 성질을 활용하여 주어진 함수의 미분계수가 0이 되는 점을 찾고, 그 점 근방에서의 증감을 판단하여 각 점에서 함수가 극댓값, 극솟값을 갖는지 판정한다.
(2-2) 삼각함수의 성질을 활용하여 주어진 함수의 미분계수가 0이 되는 점을 찾고, 그 점 근방에서의 증감을 판단하여 각 점에서 함수가 극댓값, 극솟값을 갖는지 또는 둘 다 갖지 않는지 판정한다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th colspan="2">하위문항번호</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="3">(2-1)</td><td>(a)</td><td>해를 모두 찾으면</td><td>5점</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(b)</td><td>$\sqrt{\pi}$, 2, $\sqrt{2\pi}$, $1+\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $F(x)$의 부호 변화를 맞게 서술하면</td><td>8점</td></tr>
<tr><td>$F(x)$가 극댓값, 극솟값을 갖는 점을 모두 찾으면</td><td>2점</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(2-2)</td><td>(a)</td><td>해를 모두 찾으면</td><td>5점</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(b)</td><td>$\pm\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$, $\pm\sqrt{2}$의 좌우에서 $G(x)$의 부호 변화를 맞게 서술하면</td><td>8점</td></tr>
<tr><td>$\pm\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$, $\pm\sqrt{4-\pi}$의 좌우에서 $G(x)$의 부호 변화가 없음을 설명하면</td><td>4점</td></tr>
<tr><td>$G(x)$가 극댓값, 극솟값을 갖는 점을 모두 찾으면</td><td>3점</td></tr>
</table>

7. 예시 답안

(2-1) (a) $\cos(t-1)\sin(t-2)\sin(t^2)=0$이므로 $\cos(t-1)=0$, $\sin(t-2)=0$ 또는 $\sin(t^2)=0$이다.

따라서 $t-1=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $t-2=n\pi$ 또는 $t^2=n\pi$ (n은 정수)꼴이 되어야 한다.

$0<t<3$이므로 $-1<t-1<2$, $-2<t-2<1$, $0<t^2<9$이다. 따라서 범위 내에서 함숫값이 0이 되는 t의 값들은 $1+\frac{\pi}{2}$, 2, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{2\pi}$이다.

(b) $F(x)=\int_0^x \cos(t-1)\sin(t-2)\sin(t^2)dt$를 미분하면

$$F'(x)=f(x)=\cos(x-1)\sin(x-2)\sin(x^2)$$

이고, 범위 내에서 이 값이 0이 되는 x의 값들을 순서대로 나열하면 $\sqrt{\pi}$, 2, $\sqrt{2\pi}$, $1+\frac{\pi}{2}$이다. (제시문 (나)에 의하여 $1+\frac{\pi}{2}>\sqrt{2\pi}$이다.)

이제 각 값에 대하여 그 값의 좌우에서 $\cos(x-1)$, $\sin(x-2)$, $\sin(x^2)$의 부호를 관찰하자. $\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 코사인함수의 부호가 양에서 음으로 바뀌고 0의 좌우에서 사인함수의 부호가 음에서 양으로, π의 좌우에서 사인함수의 부호가 양에서 음으로 바뀐다. 그러므로

x	$\cdots$	$\sqrt{\pi}$	$\cdots$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\cdots$	$\sqrt{2\pi}$	$\cdots$	$\cdots$	$1+\frac{\pi}{2}$	$\cdots$
$\cos(x-1)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	−
$\sin(x-2)$	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$\sin(x^2)$	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+
$f(x)$	−	0	+	+	0	−	−	0	+	+	0	−

그러므로 제시문 (가)에 의해 함수 $F(x)$는 $\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}$에서 극솟값을 2, $1+\frac{\pi}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

(2-2) (a) $-\sqrt{\pi} < t < \sqrt{\pi}$이므로 $0 \leqq t^2 < \pi$이고, 따라서 $-n \leqq t^2 - n < \pi - n$이다. 범위를 고려하여 각 항이 0이 되는 t의 값을 찾으면 다음과 같다.

$$\cos(t^2-1)=0 \Leftrightarrow t^2-1=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$$
$$\sin(t^2-2)=0 \Leftrightarrow t^2-2=0 \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$$
$$\cos(t^2-3)=0 \Leftrightarrow t^2-3=-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$$
$$\sin(t^2-4)=0 \Leftrightarrow t^2-4=-\pi \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{4-\pi}$$

즉, 해는 $t=\pm\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$, $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$, $\pm\sqrt{4-\pi}$이다.

(2-2) (b) $G(x)=\int_0^x \cos(t^2-1)\sin(t^2-2)\cos^2(t^2-3)\sin^2(t^2-4)dt$를 미분하면

$$G'(x)=g(x)=\cos(x^2-1)\sin(x^2-2)\cos^2(x^2-3)\sin^2(x^2-4)$$

이다. 이 함수의 값이 0이 되는 점들의 좌우에서의 $G'(x)$의 부호를 관찰하자.

1) $x=-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$ 또는 $x=\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$인 경우.

$\cos^2(x^2-3)\sin^2(x^2-4)$의 부호는 이 점들의 근방에서 항상 양수이므로, $\cos(x^2-1)$과 $\sin(x^2-2)$의 부호만 고려하면 된다. $x^2-2=\frac{\pi}{2}-1$이므로 이 점들의 근방에서 $\sin(x^2-2)$의 값은 양수이다.

$x=-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$의 좌우에서 x^2-1은 $\frac{\pi}{2}$보다 큰 값에서 작은 값으로 변하고, $\cos(x^2-1)$은 음수에서 양수로 변한다.

$x=\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$의 좌우에서 x^2-1은 $\frac{\pi}{2}$보다 작은 값에서 큰 값으로 변하고, $\cos(x^2-1)$은 양수에서 음수로 변한다. 그러므로 제시문 (가)에 의해 $x=-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$에서 극솟값을 갖고, $x=\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$에서 극댓값을 갖는다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$	$\cdots$	$\cdots$	$\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$	$\cdots$
$\cos(x^2-1)$	-	0	+	+	0	-
$\sin(x^2-2)$	+	+	+	+	+	+
$\cos^2(x^2-3)\sin^2(x^2-4)$	+	+	+	+	+	+
$g(x)$	-	0	+	+	0	-

2) $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$인 경우.

$\cos^2(x^2-3)\sin^2(x^2-4)$의 부호는 이 점들의 근방에서 항상 양수이므로, $\cos(x^2-1)$과 $\sin(x^2-2)$의 부호만 고려하면 된다. $x^2-1=1$이므로 이 점들의 근방에서 $\cos(x^2-1)$의 값은 양수이다.

$x=-\sqrt{2}$의 좌우에서 x^2-2는 0보다 큰 값에서 작은 값으로 변하고, $\sin(x^2-2)$는 양수에서 음수로 변한다.

$x=\sqrt{2}$의 좌우에서 x^2-2는 0보다 작은 값에서 큰 값으로 변하고, $\sin(x^2-2)$는 음수에서 양수로 변한다.

그러므로 제시문 (가)에 의해 $x=-\sqrt{2}$에서 극댓값을 갖고, $x=\sqrt{2}$에서 극솟값을 갖는다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$\cos(x^2-1)$	+	+	+	+	+	+
$\sin(x^2-2)$	+	0	-	-	0	+
$\cos^2(x^2-3)\sin^2(x^2-4)$	+	+	+	+	+	+
$g(x)$	+	0	-	-	0	+

3) $x=\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$ 또는 $x=-\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$인 경우.

이 점들의 좌우에서 $\cos^2(x^2-3)$의 값은 항상 양수이므로, 함숫값의 부호가 바뀌지 않는다. 따라서 이 점들에서 극댓값이나 극솟값을 갖지 않는다.

4) $x=\sqrt{4-\pi}$ 또는 $x=-\sqrt{4-\pi}$인 경우.

이 점들의 좌우에서 $\sin^2(x^2-4)$의 값은 항상 양수이므로, 함숫값의 부호가 바뀌지 않는다. 따라서 이 점들에서 극댓값이나 극솟값을 갖지 않는다.

따라서 $G(x)$가 극댓값을 갖는 점은 $\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$, $-\sqrt{2}$이고, 극솟값을 갖는 점은 $-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{2}$이다.

2025학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연_오전]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후 □ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ	
	핵심개념 및 용어	접선의 방정식, 판별식	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

접선의 방정식을 구하고 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프의 개형을 파악하고, 그래프의 평행이동을 이해하는지 평가한다.

(3-1) 접선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.

(3-2) 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프의 개형을 파악하고, 그래프의 평행이동을 이해하는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ □ 미적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (가)	[수학Ⅱ] - (1) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (나)	[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
문항 (3-1)	[수학Ⅱ] - (1) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문항 (3-2)	[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	76
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2020	73
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2020	49
	수학	박교식 외	동아출판	2020	50

5. 문항 해설

(3-1) 접선의 기울기가 미분계수와 같음을 이용하여 접선의 방정식을 구한다.
(3-2) 판별식을 이용하여 주어진 이차함수의 그래프의 개형을 파악하고, 이를 평행이동하여 (3-1)의 상황으로 만들어 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

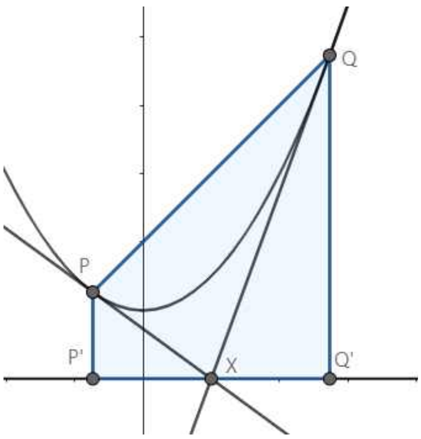
하위문항번호		채점 기준	배점
(3-1)		P, Q의 x좌표를 모두 구하면	5점
		사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이를 구하면	5점
(3-2)	(a)	$h(p)$의 최댓값을 구하면	5점
	(b)	곡선 $y=g(x)$의 개형을 파악하면	5점
		사다리꼴 $BB'C'C$의 넓이를 구하면	5점
	(c)	S의 최솟값을 구하면	5점

7. 예시 답안

(3-1) 접점의 x좌표를 c라 하면 접선의 기울기로부터 $2c=\dfrac{c^2+b}{c-a}$이고 $c=a\pm\sqrt{a^2+b}$이다. 따라서 P와 Q의 x좌표는 각각 $a-\sqrt{a^2+b}$, $a+\sqrt{a^2+b}$이고 $P'=(a-\sqrt{a^2+b},0)$, $Q'=(a+\sqrt{a^2+b},0)$이므로 사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\overline{PP'}+\overline{QQ'})\times\overline{P'Q'}=\frac{1}{2}\times 4(a^2+b)\times 2\sqrt{a^2+b}=4(a^2+b)^{\frac{3}{2}}$$

이다.



(3-2) (a) 제시문 (나)에 의하여 판별식이

$$(p-2)^2-4(p^3-4p+4)=-4p^3+p^2+12p-12=(p+2)(-4p^2+9p-6)$$

이므로 $h(p)=-4p^2+9p-6=-4(p-\frac{9}{8})^2-\frac{15}{16}$는 $p=\frac{9}{8}$에서 최댓값 $-\frac{15}{16}$를 가진다.

(b) $p\in(-2,2)$이므로 $p+2>0$이다. 따라서 (a)에 의하여 $g(x)=0$의 판별식 $(p+2)h(p)$는 음수이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이다. 곡선 $y=g(x)$의 꼭짓점이 y축 위에 오도록 곡선 $y=g(x)$와 점 A를 평행이동하면 (3-1)과 같은 상황이 된다. (3-1)에서 사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이는 $4(a^2+b)^{\frac{3}{2}}=4f(a)^{\frac{3}{2}}$이므로 사다리꼴

$BB'C'C$의 넓이는

$$S=4g(1)^{\frac{3}{2}}=4(p^3-3p+3)^{\frac{3}{2}}$$

이다.

(c) S는 p^3-3p+3이 최소일 때 최솟값을 가진다. $r(p)=p^3-3p+3$이라 하면 $r'(p)=3p^2-3$이므로 $p=1$에서 극솟값, $p=-1$에서 극댓값을 가진다. $\lim_{p\to -2+} r(p)=1=r(1)$이므로 S는 $p=1$일 때 최솟값을 가지고 이때 $S=4$ 이다.

2025학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연_오전(의예)]

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="3">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="3">논술우수자</td></tr>
<tr><td rowspan="2">해당 대학의 계열(과목)</td><td rowspan="2">자연계열</td><td rowspan="2">문항번호</td><td>■ 오전(의예과) □ 오후</td></tr>
<tr><td>■ 1번 □ 2번 □ 3번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td colspan="2">수학, 수학Ⅱ</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td colspan="2">접선의 방정식, 판별식</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="3">(40) 분 / 전체 120분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

접선의 방정식을 구하고 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프의 개형을 파악하고, 그래프의 평행이동을 이해하는지 평가한다.

(1-1) 접선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.

(1-2) 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프의 개형을 파악하고, 그래프의 평행이동을 이해하는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ □ 미적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (가)	[수학Ⅱ] - (1) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (나)	[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
문항 (1-1)	[수학Ⅱ] - (1) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문항 (1-2)	[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	76
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2020	73
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2020	49
	수학	박교식 외	동아출판	2020	50

5. 문항 해설

(1-1) 접선의 기울기가 미분계수와 같음을 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

(1-2) 판별식을 이용하여 주어진 이차함수의 그래프의 개형을 파악하고, 이를 평행이동하여 (1-1)의 상황으로 만들어 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

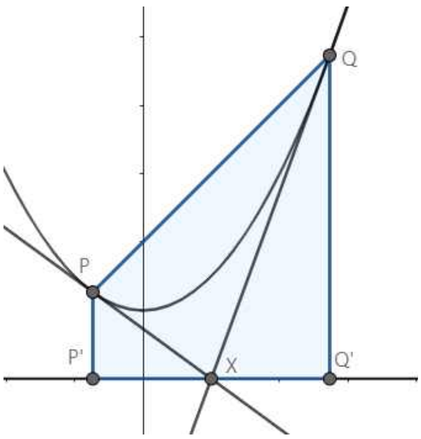
<table>
<tr><th colspan="2">하위문항번호</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">(1-1)</td><td>P, Q의 x좌표를 모두 구하면</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이를 구하면</td><td>5점</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(1-2)</td><td>(a)</td><td>$h(p)$의 최댓값을 구하면</td><td>5점</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(b)</td><td>곡선 $y=g(x)$의 개형을 파악하면</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>사다리꼴 $BB'C'C$의 넓이를 구하면</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>(c)</td><td>S의 최솟값을 구하면</td><td>5점</td></tr>
</table>

7. 예시 답안

(1-1) 접점의 x좌표를 c라 하면 접선의 기울기로부터 $2c=\dfrac{c^2+b}{c-a}$이고 $c=a\pm\sqrt{a^2+b}$이다. 따라서 P와 Q의 x좌표는 각각 $a-\sqrt{a^2+b}$, $a+\sqrt{a^2+b}$이고 $P'=(a-\sqrt{a^2+b},0)$, $Q'=(a+\sqrt{a^2+b},0)$이므로 사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\overline{PP'}+\overline{QQ'})\times\overline{P'Q'}=\frac{1}{2}\times4(a^2+b)\times2\sqrt{a^2+b}=4(a^2+b)^{\frac{3}{2}}$$

이다.



(1-2) (a) 제시문 (나)에 의하여 판별식이

$$(p-2)^2-4(p^3-4p+4)=-4p^3+p^2+12p-12=(p+2)(-4p^2+9p-6)$$

이므로 $h(p)=-4p^2+9p-6=-4(p-\frac{9}{8})^2-\frac{15}{16}$는 $p=\frac{9}{8}$에서 최댓값 $-\frac{15}{16}$를 가진다.

(b) $p\in(-2,2)$이므로 $p+2>0$이다. 따라서 (a)에 의하여 $g(x)=0$의 판별식 $(p+2)h(p)$는 음수이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이다. 곡선 $y=g(x)$의 꼭짓점이 y축 위에 오도록 곡선 $y=g(x)$와 점 A를 평행이동하면 (1-1)과 같은 상황이 된다. (1-1)에서 사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이는 $4(a^2+b)^{\frac{3}{2}}=4f(a)^{\frac{3}{2}}$이므로 사다리꼴

$BB'C'C$의 넓이는

$$S = 4g(1)^{\frac{3}{2}} = 4(p^3 - 3p + 3)^{\frac{3}{2}}$$

이다.

(c) S는 $p^3 - 3p + 3$이 최소일 때 최솟값을 가진다. $r(p) = p^3 - 3p + 3$이라 하면 $r'(p) = 3p^2 - 3$이므로 $p = 1$에서 극솟값, $p = -1$에서 극댓값을 가진다. $\lim_{p \to -2+} r(p) = 1 = r(1)$이므로 S는 $p = 1$일 때 최솟값을 가지고 이때 $S = 4$이다.

2025학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연_오전(의예)]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전(의예과) □ 오후 □ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I	
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 수열의 귀납적 정의	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

삼각함수의 성질 또는 개형을 이해하여 삼각함수로 주어진 문제의 조건을 파악할 수 있는지 평가한다. 또한 귀납적으로 정의된 수열을 계산하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
(2-1) 수열의 귀납적 정의를 이해하는지 평가한다.
(2-2) 사인함수와 코사인함수의 성질을 이해하는지 평가한다.
(2-3) 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 파악하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	☐ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** ☐ 수학 ■ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 미적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (가)	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ③ 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
제시문 (나)	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문항 (2-1)	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ③ 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문항 (2-2)	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문항 (2-3)	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ③ 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	고성은 외	좋은책 신사고	2020	70-86, 144-145
	수학Ⅰ	김원경 외	비상	2020	65-88, 145-147

5. 문항 해설

이 문항은 삼각함수를 이용하여 귀납적으로 정의된 수열을 이해하는 문제이다.
(2-1) 문제의 조건을 정확히 이해하여 a_2, a_3의 값을 계산한다. 제시문 (나)를 이용하면 삼각함수로 주어진 문제의 조건을 삼각함수가 없는 두 가지 서로 다른 등식으로 서술할 수 있다.
(2-2) 이 수열을 결정하는 문제의 조건을 파악해서 첫 번째 항으로부터 두 번째 항을 계산할 수 있다.
(2-3) 주어진 수열의 첫 몇 개의 항뿐 아니라 특정한 조건에서 수열이 전체적으로 어떠한 규칙과 성질을 갖는지 파악한다. 수열을 결정하는 두 개의 등식을 만족하는 값이 첫 번째 항의 크기에 따라서 바뀔 수 있으므로 경우를 나누어서 수열의 성질을 파악한다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	$n=1$일 때 문제의 조건을 만족하는 x의 값을 찾아내고 a_2의 값을 구하면	5점
	$n=2$일 때 문제의 조건을 만족하는 x의 값을 찾아내고 a_3의 값을 구하면	5점
(2-2)	$n=1$일 때 문제의 조건을 만족하는 x의 값이 $\frac{\pi}{2}$보다 작은 경우 a_1의 범위를 구하면	6점
	문제의 조건을 만족하는 x의 값 중에 가장 작은 값이 $\frac{\pi}{2}$인 경우 $a_1=\pi$임을 구하면	4점
(2-3)	$\frac{\pi}{3}<a_1<\frac{\pi}{2}$일 때 집합의 원소의 개수가 일반적으로 4인 것을 파악하면	7점
	특수한 a_1의 경우 원소의 개수가 3이 될 수 있는 것을 알아내면	3점
	$a_1=\frac{\pi}{2}$일 때 집합의 원소의 개수가 5라는 것을 알아내면	5점

7. 예시 답안

(2-1) $\sin\left(2x-\frac{3}{2}a_n\right)=\cos\left(2x-\frac{3}{2}a_n-\frac{\pi}{2}\right)$이므로 $\sin\left(2x-\frac{3}{2}a_n\right)=\cos\left(x-\frac{3}{2}a_n\right)$이면

$2x-\frac{3}{2}a_n-\frac{\pi}{2}=x-\frac{3}{2}a_n+2l\pi$인 정수 l이 존재하거나 $2x-\frac{3}{2}a_n-\frac{\pi}{2}=2k\pi-\left(x-\frac{3}{2}a_n\right)$인 정수 k가 존재한다.

각각의 경우

$$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}+4\pi,\ \frac{\pi}{2}+6\pi,\ \cdots \qquad \text{---------------- ①}$$

또는

$$x=a_n+\frac{\pi}{6}, a_n+\frac{\pi}{6}\pm\frac{2\pi}{3},\ a_n+\frac{\pi}{6}\pm\frac{4\pi}{3},\ a_n+\frac{\pi}{6}\pm\frac{6\pi}{3},\cdots \text{ 중 양수인 것이다.} \qquad \text{------- ②}$$

①을 만족하는 x의 값은 수열의 이전 항의 값에 관계없이 결정되며, ②를 만족하는 x의 값은 이전 항의 값에 따라서 달라질 수 있다.

① 또는 ②를 만족하는 x의 값을 작은 것부터 나열해 보면 a_2는 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6},\cdots$중에서 2번째 값인 $\frac{\pi}{2}$이고,

a_3는 $\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi\cdots$ 중에서 3번째 값인 $\frac{4\pi}{3}$이다.

(2-2) 각각의 n에 대하여 ②를 만족하는 x는 각각의 구간 $\left(\frac{2(m-1)\pi}{3}, \frac{2m\pi}{3}\right]$에 하나씩 존재한다. $(m=1, 2, 3, \cdots)$

(경우 1) $n=1$일 때 ①을 만족하는 값 $\frac{\pi}{2}$와 ②를 만족하는 가장 작은 값이 서로 다르면, a_2는 이 두 값 중 더 큰 값이다. ②를 만족하는 양수 중 가장 작은 값이 $a_1+\frac{\pi}{6}$가 되려면 $a_1+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$이어야 하고 이 값이 $\frac{\pi}{2}$보다

크려면 $\frac{\pi}{2}< a_1+\frac{\pi}{6}$이어야 한다. 따라서 $\frac{\pi}{3}< a_1 \le \frac{\pi}{2}$이다.

(경우 2) $n=1$일 때 ①을 만족하는 값 $\frac{\pi}{2}$와 ②를 만족하는 가장 작은 값이 같으면, a_2는 ②를 만족하는 x의 값 중 크기순으로 두 번째의 값이다. 그러므로 $\frac{2\pi}{3}< a_2 \le \frac{4\pi}{3}$이어야 하는데, $a_2=a_1+\frac{\pi}{6}$이므로 ②를 만족하는 가장 작은 값은 $a_1+\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}$이고 이 값이 $\frac{\pi}{2}$와 같아야 한다. 따라서 $a_1=\pi$이다.

그러므로 문제의 조건을 만족하려면 $\frac{\pi}{3}< a_1 \le \frac{\pi}{2}$ 또는 $a_1=\pi$이다.

(2-3) $\frac{\pi}{2}< a_2=a_1+\frac{\pi}{6}< \frac{2\pi}{3}$인 경우, a_3는 ②를 만족하는 값 중 구간 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$에 있는 것이다.

따라서 $a_3=a_2+\frac{\pi}{6}=a_1+\frac{\pi}{3}$이다.

a_4는 ②를 만족하는 값 중에 구간 $\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right]$에 있는 것이므로 $a_4=\left(a_3+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{2\pi}{3}=a_1+\frac{7\pi}{6}$이다.

a_5는 구간 $\left(2\pi,\frac{8\pi}{3}\right]$에 있으면서 ②를 만족하는 값 $a_1+2\pi$와 ①을 만족하는 값 $\frac{\pi}{2}+2\pi$ 중 작은 값인 $a_1+2\pi$이다. 위 과정을 반복하면 a_5,a_6,a_7,a_8은 각각 a_1,a_2,a_3,a_4에 각각 2π씩 더한 값이고 이 규칙성은 4개의 항마다 반복된다.

따라서 $\{\sin a_n \mid n=1,2,3,\cdots\}=\left\{\sin a_1, \sin\left(a_1+\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(a_1+\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(a_1+\frac{7\pi}{6}\right)\right\}$이고, $\frac{\pi}{3}< a_1<\frac{\pi}{2}$일 때 이 집합의 원소의 개수는 일반적으로 4이지만, $a_1=\frac{5\pi}{12}$일 때는 $\sin a_1=\sin\left(a_1+\frac{\pi}{6}\right)$이므로 원소의 개수가 3이다.

$a_1=\frac{\pi}{2}$, $a_2=\frac{2\pi}{3}$인 경우에는 $a_3=a_2+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$이다.
이 이후의 항은 다음과 같다.

(i) $n=4m$ (m은 자연수) 꼴일 때 a_n은

$$\left\{\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}+2\pi,\frac{\pi}{3}+4\pi,\cdots\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2\pi,\frac{\pi}{2}+4\pi,\cdots\right\}\cup\{\pi,\pi+2\pi,\pi+4\pi,\cdots\}\cup\left\{\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}+2\pi,\frac{5\pi}{3}+4\pi,\cdots\right\}$$

중 n번째의 값이며 이 값은 $\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}+2\pi, \frac{5\pi}{3}+4\pi, \cdots$중 하나이다.

(ii) $n=4m+1$ (m은 음이 아닌 정수) 꼴일 때 a_n은

$$\left\{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2\pi,\frac{\pi}{2}+4\pi,\cdots\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{7\pi}{6}+2\pi,\frac{7\pi}{6}+4\pi,\cdots\right\}\cup\left\{\frac{11\pi}{6},\frac{11\pi}{6}+2\pi,\frac{11\pi}{6}+4\pi,\cdots\right\}$$

중 n번째 값이며 이 값은 $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}+2\pi, \frac{11\pi}{6}+4\pi, \cdots$ 중 하나이다.

(iii) $n=4m+2$ (m은 음이 아닌 정수) 꼴일 때 a_n은

$$\left\{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2\pi,\frac{\pi}{2}+4\pi,\cdots\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}+2\pi,\frac{2\pi}{3}+4\pi,\cdots\right\}\cup\left\{\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}+2\pi,\frac{4\pi}{3}+4\pi,\cdots\right\}\cup\{2\pi,4\pi,6\pi,\cdots\}$$

중 n번째의 값이며 이 값은 $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}+2\pi, \frac{2\pi}{3}+4\pi, \cdots$ 중 하나이다.

(iv) $n=4m+3$ (m은 음이 아닌 정수) 꼴일 때 a_n은

$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}+2\pi, \frac{\pi}{6}+4\pi, \cdots\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \cdots\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}+2\pi, \frac{5\pi}{6}+4\pi, \cdots\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}+2\pi, \frac{3\pi}{2}+4\pi, \cdots\right\}$

중 n번째의 값이며 이 값은 $\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}+2\pi, \frac{5\pi}{6}+4\pi, \cdots$ 중 하나이다.

이때 집합 $\{\sin a_n \mid n=1,2,3, \cdots\} = \left\{\sin\frac{5\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{7\pi}{6}, \sin\frac{11\pi}{6}, \sin\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{5\pi}{6}\right\} = \left\{1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$의 원소의 개수는 5이다.

따라서 이 집합의 원소의 개수가 될 수 있는 값은 $3, 4, 5$이다.

2025학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연_오전(의예)]

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="3">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="3">논술우수자</td></tr>
<tr><td rowspan="2">해당 대학의 계열(과목)</td><td rowspan="2">자연계열</td><td rowspan="2">문항번호</td><td>■ 오전(의예과) □ 오후</td></tr>
<tr><td>□ 1번 □ 2번 ■ 3번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td colspan="2">수학, 수학 Ⅰ</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td colspan="2">수학적 귀납법</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="3">(40) 분 / 전체 120분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

주어진 상황을 논리적으로 해석하고 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는지 평가한다.
(3-1) 주어진 조건을 이해하는지 평가한다.
(3-2) 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는지 평가한다.
(3-3) 등차수열의 성질을 주어진 조건에 적용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 ■ 수학 Ⅰ □ 수학 Ⅱ □ 미적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학 Ⅰ] - (3) 수열 - ③ 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
문항 (3-1)	[수학] - (3) 수와 연산 - ① 집합 [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.
문항 (3-2)	[수학 Ⅰ] - (3) 수열 - ③ 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
문항 (3-3)	[수학 Ⅰ] - (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	배종숙 외	㈜금성출판사	2020	158
	수학 Ⅰ	권오남 외	㈜교학사	2020	155

5. 문항 해설

(3-1) $a+b=c$인 세 자연수의 성질을 조건에 적용하여 문제를 해결한다.
(3-2) 최댓값이 되는 예를 하나 찾고, 그 외에는 불가능함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한다.
(3-3) (3-2)에서 관찰한 사실을 새로운 조건에 맞게 변형하여 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

하위문항번호		채점 기준	배점
(3-1)		$\sigma(S)=20$을 보이면	5점
(3-2)	(a)	$2n-1$ 이하임을 증명하면	3점
		$2n-1$인 구체적인 예를 하나 제시하면	2점
	(b)	$M \le n^2$임을 증명하면	3점
		$M=n^2$인 구체적인 예를 하나 제시하면	2점
	(c)	$n=2$인 경우 S를 모두 찾으면	3점
		$S=\{1,2,\dots,2n+1\}$뿐임을 증명하면	7점
(3-3)		S는 두 가지 형태뿐임을 증명하면	7점
		S의 개수를 정확히 구하면	3점

7. 예시 답안

(3-1) 5 이하의 자연수 n에 대하여 $a+b=4n$인 S의 원소 $a,b\ (a<b)$의 순서쌍 (a,b)의 개수는 $n-1$이고 $a+b=4n-2$인 S의 원소 $a,b\ (a<b)$의 순서쌍 (a,b)의 개수는 $n-1$이므로

$$\sigma(S)=\sum_{i=1}^{5}2(i-1)=20$$

이다.

(3-2)
(a) $a+b=x$, $a+b=y$인 S의 원소 $a,b\ (a<b)$의 순서쌍 (a,b)의 개수는 각각 최대 n, $n-1$이므로 조건을 만족하는 순서쌍의 개수는 $2n-1$ 이하이다. 한편 $S=\{1,2,\cdots,2n+1\}$일 때 조건을 만족하는 순서쌍 (a,b)의 개수는 정확히 $2n-1$이므로 답은 $2n-1$이다.

(b) S의 원소를 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n},a_{2n+1}\ (a_1<a_2<\cdots<a_{2n}<a_{2n+1})$이라 하고 n 이하의 자연수 k에 대하여 $S_k=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2k+1}\}$이라 하자. (a)에 의하여 $k\ge 2$이면 $\sigma(S_k)-\sigma(S_{k-1})\le 2k-1$임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\sigma(S_n)&=(\sigma(S_n)-\sigma(S_{n-1}))+(\sigma(S_{n-1})-\sigma(S_{n-2}))+\cdots+(\sigma(S_2)-\sigma(S_1))+\sigma(S_1)\\&\le(2n-1)+(2n-3)+\cdots+3+1=n^2\end{aligned}$$

이다. 한편, $S=\{1,2,\cdots,2n+1\}$이면 $\sigma(S)=n^2$이므로 최댓값 M은 n^2이다.

(c) $S=\{1,2,\cdots,2n+1\}$이면 문제의 조건을 만족한다. 이제 $n\ge 2$에 대하여 S는 $\{1,2,\cdots,2n+1\}$뿐임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하자.

$n=2$인 경우를 보자. $S=\{1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ $(1<a_2<\cdots<a_5)$라 하자. $\sigma(S)=2^2=4$이므로 (a,b,c)가 $(1,a_2,a_3)$, $(1,a_4,a_5)$, (a_2,a_3,a_5)인 경우 $a+b=c$를 만족해야 한다. 즉, $a_3=a_2+1$, $a_4=2a_2$, $a_5=2a_2+1$이다. 또한 a_4는

$1+a_2, 1+a_3, a_2+a_3$ 중 하나와 같아야 하는데, $1+a_2 < 2a_2(=a_4) < a_2+a_3$이므로 $a_4 = 1+a_3$이고 $a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5$이다. 즉, $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$이다.

$n > 2$라 하자. $n-1$인 경우에는 조건을 만족하는 집합이 $\{1, 2, \cdots, 2(n-1)+1\}$뿐이라 가정하고, n인 경우를 증명하자. S의 원소 중 가장 큰 것과 두 번째로 큰 것을 각각 x, y라 하자.
$S' = S - \{x, y\}$라 하면 (a)에 의하여 $2n-1 \geq \sigma(S) - \sigma(S') = n^2 - \sigma(S')$이므로 $\sigma(S') \geq (n-1)^2$이다. (b)에 의하여 $\sigma(S') \leq (n-1)^2$이므로 $\sigma(S') = (n-1)^2$이다.
$1 \in S'$이고 $\sigma(S') = (n-1)^2$이므로 가정에 의하여 $S' = \{1, 2, \cdots, 2(n-1)+1\}$이고 $S = \{1, 2, \cdots, 2(n-1)+1, x, y\}$이다. 그런데 $a+b \in \{x, y\}$인 (a, b)의 개수가 정확히 $2n-1$이어야 하므로 $x = 2n$, $y = 2n+1$이다. 즉, $S = \{1, 2, \cdots, 2n+1\}$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 $S = \{1, 2, \cdots, 2n+1\}$이다.

(3-3) S의 원소를 크기순으로 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{202}$라 하고 $S' = S - \{a_{202}\}$라 하자.
$n(S') = 201$이므로 (3-2)(b)에 의하여 $\sigma(S') \leq 100^2$이다.
한편 $100 \geq \sigma(S) - \sigma(S') = (100^2 + 100) - \sigma(S') \geq (100^2 + 100) - 100^2 = 100$이므로 $100 = \sigma(S) - \sigma(S')$이고 $\sigma(S') = 100^2$이어야 한다.
$100 = \sigma(S) - \sigma(S')$에서 $a+b = a_{202}$를 만족하는 S의 원소 a, b $(a < b)$의 순서쌍 (a, b)의 개수가 정확히 100개라는 것을 알 수 있다. 또한, $\sigma(S') = 100^2$이므로 (3-2)(c)와 같은 방법으로 S'은 반드시 $\{d, 2d, \cdots, 201d\}$꼴, 즉 $a_k = dk$ $(k = 1, 2, \cdots, 201)$인 자연수 d가 존재함을 알 수 있다. 한편 $a+b = a_{202}$를 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수가 정확히 100개이기 위해서는 $a_{202} = 202d$ 또는 $203d$이어야 한다. 그러므로 $S = \{d, 2d, \cdots, 201d, 202d\}$ 또는 $\{d, 2d, \cdots, 201d, 203d\}$꼴이다. 전자의 경우 가능한 S의 개수는 10, 후자의 경우 가능한 S의 개수는 9이므로 가능한 S의 개수는 총 19이다.