2026학년도 수시모집 논술전형 논술고사
문항해설 및 채점기준 [자연계열Ⅱ(약학대학)]

[덕성여자대학교 문항정보 1]

1. 일반정보

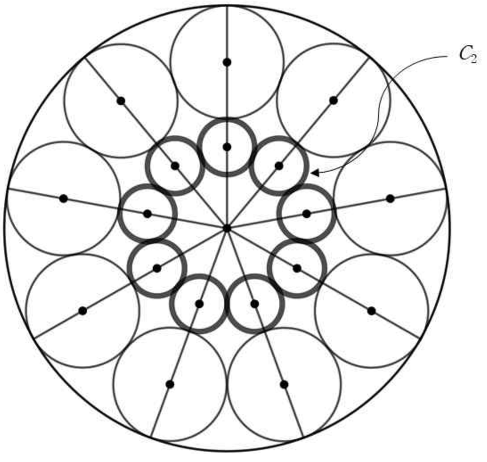
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅱ(약학대학) / 문제번호 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ
	핵심개념 및 용어	도형의 방정식, 삼각함수, 수열의 귀납적 정의, 등차수열과 등비수열, 수열의 합
예상 소요 시간	총 90분 중 20분 소요 예상	

2. 문항 및 제시문

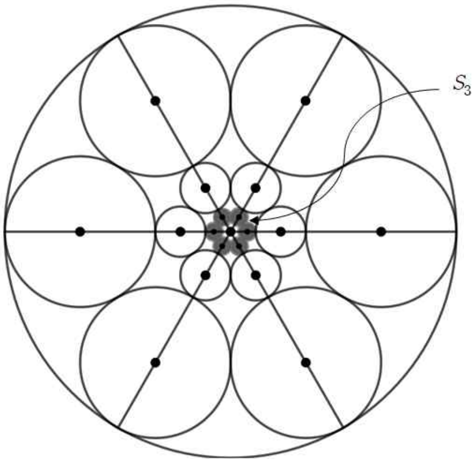
[문제1] [25점]

반지름의 길이가 1인 원에 아래의 조건을 만족하는 도형을 그린다.
수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 3n+3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이다.

(가) 첫 번째 시행에서는, 반지름의 길이가 r_1인 a_n개의 원을 서로 외접하면서 반지름의 길이가 1인 원에 내접하게 그린다.
(나) 두 번째 시행에서는, 첫 번째 시행된 결과에 추가로 반지름의 길이가 r_2(단, $r_1 > r_2$)인 a_n개의 원들을 서로 외접하며, 첫 번째 시행의 결과에 모두 외접하게 [그림 1]과 같이 그린다.
(다) 이와 같은 방법으로 k번 시행을 반복할 때, 시행 별로 그려진 원의 반지름 길이는 r_k이고, 원들은 [그림 1], [그림 2]와 같이 그린다.
(라) [그림 1], [그림 2]와 같이 k번째 시행에서 그려진 원의 둘레의 길이의 총합을 C_k라 하고, 원의 넓이의 총합을 S_k라 한다.



[그림 1] $n=2$, $k=2$일 때,
C_2는 두 번째 시행에서 그려진 9개 원의 둘레의 길이의 총합



[그림 2] $n=1$, $k=3$일 때,
S_3은 세 번째 시행에서 그려진 6개 원의 넓이의 총합

[문제 1-1] $n=1$, $k=2$일 때, S_2와 C_2의 값을 각각 구하시오. [5점]

[문제 1-2] $n=1$, $k=10$일 때, $\sum_{k=1}^{10} S_k$와 $\sum_{k=1}^{10} C_k$의 값을 각각 구하시오. [7점]

[문제 1-3] $n=N$일 때, k번째 시행에서 그려진 원의 반지름의 길이의 일반항 r_k를 구하시오. [13점]

3. 출제 의도

[문제 1-1]

- 삼각함수를 이용하여, 한 변의 길이를 구할 수 있는지 알아본다.
- 원의 총 넓이와 원의 총 둘레의 길이를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 1-2]

- 등비수열의 일반항을 이용해 등비수열의 합을 구할 수 있는지 알아본다.
- 주어진 조건을 이용하여 원의 넓이의 총합과 원의 둘레의 길이의 총합을 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 1-3]

- a_n의 일반항과 사잇각과의 규칙을 찾을 수 있는지 알아본다.
- 반복시행에 따라 변화하는 등비수열의 일반항을 구할 수 있는지 알아본다.
- 수열의 귀납적 정의를 이해하고 활용할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
1	1-1	**[수학]-(2)기하-③ 원의 방정식** [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. **[수학Ⅰ]-(2)삼각함수-① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	1-2	**[수학Ⅰ]-(3)수열-① 등차수열과 등비수열** [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[수학Ⅰ]-(3)수열-② 수열의 합** [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	1-3	**[수학Ⅰ]-(2)삼각함수-① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. **[수학Ⅰ]-(3)수열-③ 수학적 귀납법** [12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학	권오남 외 13인	(주)교학사	2021	101~103, 131~141		
	수학 I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2020	65~71, 115~118, 123~135		
	수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2021	69~75, 123~126, 130~144		

5. 문항 해설

[문제 1-1]

・외접하는 두 원의 접점과 반지름의 길이가 1인 주어진 원의 중심, 그리고 첫 번째 시행을 통해 그려진 원의 중심 O_1을 이은 직각삼각형을 만들 수 있다.

・첫 번째 시행과 두 번째 시행을 통해 그려진 원의 반지름의 길이를 구할 수 있어야 하며, r_n , r_{n+1}의 귀납적 정의, 삼각함수, 도형의 닮음 등을 풀이에 활용한다.

・원의 넓이 πr^2과 원의 둘레의 길이 $2\pi r$을 알 수 있다.

[문제 1-2]

・a_1과 시행 $k=10$이 주어진 상황에서 시행마다 만들어진 원의 넓이의 합과 원의 둘레의 길이의 합을 구한 후, 이를 활용해 $\sum_{k=1}^{10} S_k$와 $\sum_{k=1}^{10} C_k$의 값을 구할 수 있다.

・등비수열의 합 공식 $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$을 활용할 수 있다.

[문제 1-3]

・반지름의 길이가 1 인 주어진 원에 a_n개의 원이 내접 또는 외접하는 상황에서 시행을 반복해서 생기는 원들의 반지름의 길이 r_k를 귀납적 정의를 통해 구할 수 있다.

・2π의 각을 a_n개로 나누었을 때 한 각의 크기를 $\dfrac{2\pi}{a_n}$로 놓고 $\sin\dfrac{2\pi}{a_n}$의 값을 삼각함수를 이용하여 r_k, r_{k+1}로 나타낼 수 있다.

・귀납적 정의로 표현된 식으로부터 등비수열의 일반항을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

[문제 1-1]

- (1)과 같이 도형에서 삼각함수를 이용해 r_1을 구하면 +2점
  - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(1점) : 삼각함수를 이용해 r_1에 관한 (1) 또는 (4)와 같이 식만 구할 수 있다.
  - A(2점) : 삼각함수를 이용해 r_1에 관한 (1) 또는 (4)의 식과 r_1을 정확히 구할 수 있다.

- (2)와 같이 r_1과 r_2의 관계를 정의하고 이를 이용해 r_2를 구하면 +2점
  - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(1점) : r_1과 r_2의 관계를 이용하여, (2) 또는 (5) 또는 (6)과 같이 식만 구할 수 있다.
  - A(2점) : r_1과 r_2의 관계를 이용하여, (2) 또는 (5) 또는 (6)과 r_2를 정확히 구할 수 있다.

- (3)과 같이 원의 방정식을 이용하여 S_2와 C_2를 정확히 구하면 +1점
  - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(1점) : S_2와 C_2 둘 다 정확히 구하면 +2점

[문제 1-2]

- (7)과 같이 원의 반지름 r_k에 대한 등비수열 식을 귀납적 정의로 정확히 구하면 +4점
  - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(2점) : r_1, r_2만을 구해 r_k에 대한 일반항을 구할 수 있다.
  - B(3점) : (7)과 같이 r_k와 r_{k+1}의 관계를 구할 수 있다.
  - A(4점) : (7)과 같이 r_k와 r_{k+1}의 관계를 구하고 r_k에 관한 일반항을 구할 수 있다.

- (8), (9), (10), (11)을 이용해 $\sum_{k=1}^{10} C_k$와 $\sum_{k=1}^{10} S_k$를 정확히 구하면 +3점
  - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(1점) : (8), (9)와 같이 원 넓이 합과 원 둘레의 길이의 합 중 하나만 식으로 나타낼 수 있다.
  - B(2점) : (8), (9)와 같이 원 넓이 합과 원 둘레의 길이의 합을 모두 정확한 식으로 나타낼 수 있고,
    (10)을 활용하여 $\sum_{k=1}^{10} C_k$와 $\sum_{k=1}^{10} S_k$ 중 하나만 정확히 구할 수 있다.
  - A(3점) : (8), (9), (10), (11)을 활용하여 $\sum_{k=1}^{10} C_k$와 $\sum_{k=1}^{10} S_k$를 정확히 구할 수 있다.

[문제 1-3]

- (12), (13)과 같이 a_N을 이용해 영역을 균등하게 분할하는 사잇각에 대한 $\sin\frac{\pi}{a_N}$를 α(혹은 적당한 변수)로 표현하면 +4점
  - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(2점) : (12)와 같이 $\angle \mathrm{AOB}$와 $\angle \mathrm{AOC}$를 $\frac{2\pi}{3N+3}$ 또는 $\frac{\pi}{a_N}$으로 정확히 표현할 수 있다.
  - A(4점) : (13)과 같이 사잇각 $\frac{\pi}{a_N}$에 대한 $\sin\frac{\pi}{a_N}$를 α(혹은 적당한 변수)로 정확히 표현할 수 있다.

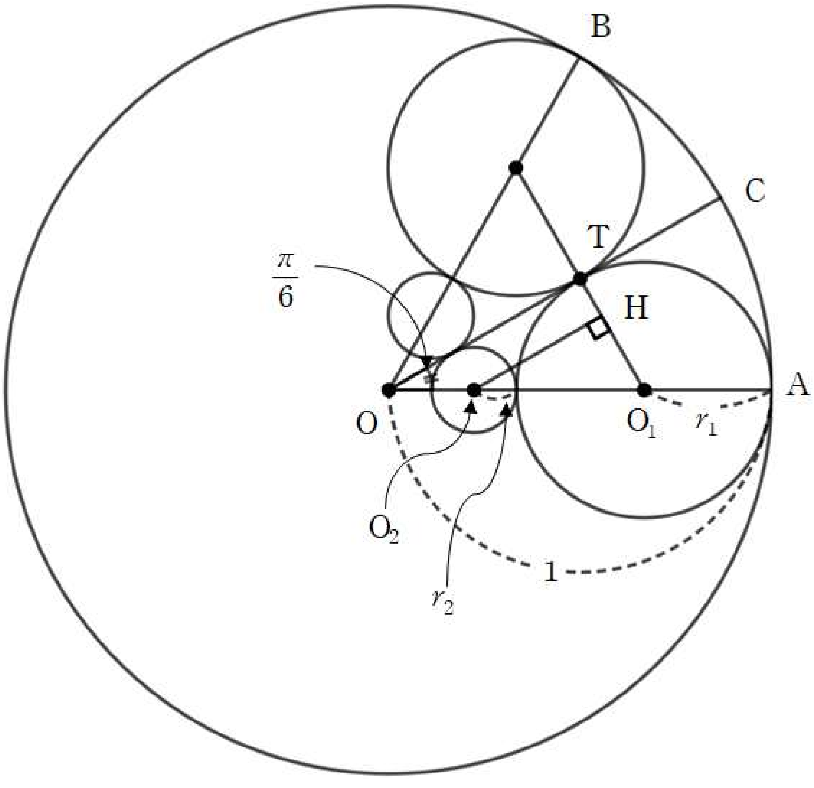
- (14), (15), (16)과 같이 등비수열의 첫째항과 α를 구하고, 귀납적 정의를 이용해 공비를 정확히 구하면 +6점
  - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(2점) : (14)와 같이 첫째항인 반지름의 길이 r_1과 정의한 α를 이용해서 정확히 표현할 수 있다.
  - B(4점) : (15)와 같이 정의한 α를 r_k와 r_{k+1}로 정확히 표현할 수 있다.
  - A(6점) : (15)와 같이 정의한 α를 r_k, r_{k+1}로 표현하며, (16)을 정확히 구할 수 있다.

- (17)과 같이 원의 반지름의 길이 r_k에 대한 등비수열의 일반항을 정확히 구하면 +3점
  - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(2점) : (17)과 같이 r_k를 α와 k에 대한 등비수열의 일반항만을 구할 수 있다.
  - A(3점) : (17)과 같이 r_k를 α와 k에 대한 등비수열의 일반항을 구하고, α에 대한 정의를 명시할 수 있다.

7. 예시 답안

[문제 1-1]

문제의 조건에서 $n=1, k=2$이므로, 시행마다 6개의 원을 내접 또는 외접하며 그리는 문제이며 총 2회 시행을 반복한다. 즉, 첫 번째 시행이 완료되면, 반지름의 길이 r_1인 6개의 원이 외접하면서 반지름의 길이가 1인 주어진 원에 서로 내접하는 형태가 되고, 두 번째 시행이 완료되면, 반지름의 길이 r_2인 6개의 원이 첫 번째 시행 결과에 그려진 반지름의 길이가 r_1인 원들과 외접하는 형태가 된다.



[그림 3]

[그림 3]과 같이 $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$이므로, $\angle\mathrm{AOC}=\frac{\pi}{6}$가 된다. 또한, $\triangle\mathrm{OO_1T}$에 대해 다음과 같다.

$$(1-r_1)\times sin\frac{\pi}{6}=r_1\ ,\ 1-r_1=2r_1\ ,\ r_1=\frac{1}{3} \tag{1}$$

(1)에 의해 구해진 반지름의 길이는 $r_1=\frac{1}{3}$이다. 또한, $\mathrm{O_2}$에서 선분 $\mathrm{O_1T}$로 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\triangle\mathrm{O_2O_1H}$에 대해 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$(r_1+r_2)\times\sin\frac{\pi}{6}=r_1-r_2 \tag{2}$$

이를 정리하면, $r_2=\frac{1}{9}$가 된다. 결론적으로, $r_1=\frac{1}{3}$, $r_2=\frac{1}{9}$을 활용해 원의 넓이 총합인 S_2와 원의 둘레의 길이 총합인 C_2를 다음과 같이 구한다.

$$S_2=6\times\pi\times\frac{1}{81}\ ,\ C_2=6\times 2\times\pi\times\frac{1}{9} \tag{3}$$

이므로 $S_2 = \dfrac{2}{27}\pi$ 이고, $C_2 = \dfrac{4}{3}\pi$ 이다.

문제 [1-1]의 별해1

1회 시행 시, 그려진 원들의 반지름의 길이는 r_1, 2회 시행 시 그려진 원들의 반지름의 길이는 r_2라 할 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{r_1}{1-r_1} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ r_1 = \frac{1}{3} \tag{4}$$

r_2를 구하기 위해, 도형의 닮음을 이용하여 비례식을 세울 수 있다.

$$1 : \frac{1}{3} = \frac{1}{3} : r_2,\ r_2 = \frac{1}{9} \tag{5}$$

또한, (4)에서 r_1을 구한 삼각비를 이용하여, r_2에 관한 삼각비를 세울 수 있다.

$$\frac{r_2}{\frac{1}{3} - r_2} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{1}{9} \tag{6}$$

문제 [1-1]의 별해2

k회 시행 시, (1)을 구한다. 그리고 r_k, r_{k+1}에 대한 관계를 수열의 귀납적 정의를 이용해 (7)과 같이 세울 수 있다. (7)을 구하고, 일반항을 $r_k = \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$로 두면 $r_2 = \dfrac{1}{9}$을 얻는다. 이후, (3)을 계산하면 $S_2 = \dfrac{2}{27}\pi$이고, $C_2 = \dfrac{4}{3}\pi$의 값을 얻는다.

[문제 1-2]

문제의 조건에서 $n=1$, $k=10$이므로, 시행마다 6개의 원을 내접 또는 외접하며 그리는 문제이며 총 10회 시행을 반복한다. 10회 시행이 반복된 이후, 시행마다 얻어진 원의 넓이 총합과 원의 둘레의 길이의 총합을 등비수열의 합을 통해 구한다.

문제 [1-1]의 일반항과 같으므로, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(r_k + r_{k+1}) \times sin\frac{\pi}{6} = r_k - r_{k+1},\ r_{k+1} = \frac{1}{3}r_k \tag{7}$$

또한, $r_k = \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$ 이므로 일반항 $r_k = \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$이다. 따라서, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} S_k$은 다음과 같은 방법으로 계산한다.

$$\sum_{k=1}^{10} S_k = a_1 \times \sum_{k=1}^{10} \pi {r_k}^2 = 6\pi \times \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\} \tag{8}$$

이는 등비수열의 합과 같으므로 다음과 같이 풀이한다.

$$\sum_{k=1}^{10} S_k = 6\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left\{1+\frac{1}{9}+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^9\right\} = \frac{2}{3}\pi \times \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{10}}{1-\frac{1}{9}} \tag{9}$$

이므로 정리하면, $\sum_{k=1}^{10} S_k$ 은 $\frac{3}{4}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{10}\right\}=\frac{3}{4}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}$ 이다.

$\sum_{k=1}^{10} C_k$ 도 마찬가지로 다음과 같이 풀이한다.

$$\sum_{k=1}^{10} C_k = a_1 \times \sum_{k=1}^{10} 2\pi r_k = 4\pi \times \left\{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^9\right\} \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{10} C_k = 4\pi \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} \tag{11}$$

이므로 정리하면, $\sum_{k=1}^{10} C_k$는 $6\pi\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$ 이다.

[문제 1-3]

일반항 $a_n = 3n+3$에 대해 영역을 균등하게 나누는 사잇각이 변화한다. a_n과 사잇각 사이의 규칙성을 논증하고 이를 서술한다. 예를 들어, $n=6$이면, 사잇각이 60°가 되고, $n=9$이면, 사잇각이 40°가 된다.

즉, 일반항의 값의 변화에 따라 $\angle\mathrm{AOB}$와 $\angle\mathrm{AOC}$를 다음과 같이 나타낸다.

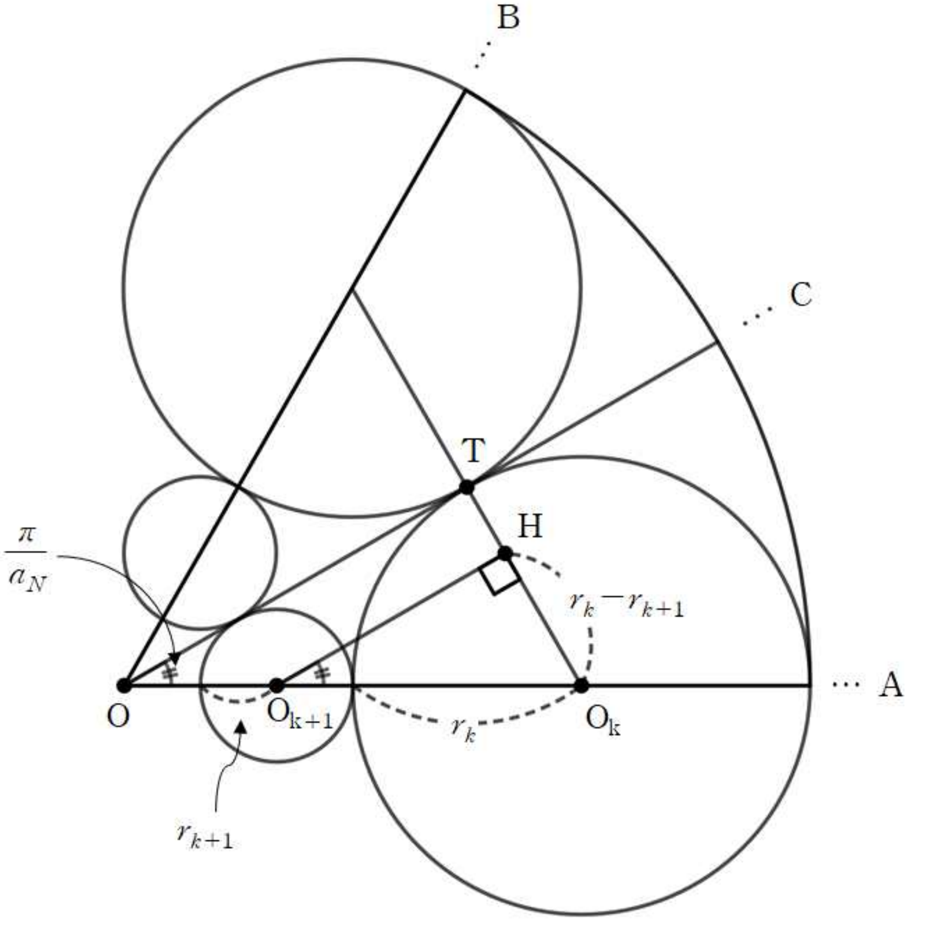
$$\angle\mathrm{AOB} = \frac{2\pi}{3N+3} = \frac{2\pi}{a_N},\quad \angle\mathrm{AOC} = \frac{\pi}{3N+3} = \frac{\pi}{a_N} \tag{12}$$

다음과 같이 α를 정의할 수 있다.

$$\alpha = \sin\frac{\pi}{3N+3} = \sin\frac{\pi}{a_N} \tag{13}$$

$\triangle\mathrm{OO_1T}$에서 삼각함수를 이용하면, 등비수열의 첫째항 r_1을 다음과 같이 얻는다.

$$(1-r_1)\times\alpha = r_1,\quad r_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha} \tag{14}$$



[그림 4]

마찬가지 방법으로, 주어진 반지름 r_k에 대해 등비수열의 일반항을 정리하면 다음과 같다.

$$\alpha = \sin\frac{\pi}{a_N} = \frac{r_k - r_{k+1}}{r_k + r_{k+1}} \tag{15}$$

이를 r_k에 대해 정리하면 r_{k+1}과 r_k에 대한 관계식을 다음과 같이 얻는다.

$$r_{k+1} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \times r_k \tag{16}$$

그러므로, 최종적으로 구해진 원의 반지름의 길이 r_k는 다음과 같다.

$$r_k = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \times \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{k-1}, \text{ 단 } \alpha = \sin\frac{\pi}{a_N} \tag{17}$$

2026학년도 수시모집 논술전형 논술고사 문항해설 및 채점기준 [자연계열Ⅱ(약학대학)]

[덕성여자대학교 문항정보 2]

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열Ⅱ(약학대학) / 문제번호 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학Ⅱ</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>항등식, 이차방정식, 이차함수, 방정식과 부등식에의 활용, 다항함수의 정적분, 곡선과 직선 사이의 넓이, 함수의 극한</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">총 90분 중 30분 소요 예상</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[문제2] [35점]

양수 $a\,(0<a<1)$에 대하여 실수 전체에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & (x<0) \\ -ax^2 & (x\ge 0) \end{cases}$$

가 있다. 0이 아닌 실수 t에 대하여 곡선 $y=-(x-t)^2+f(t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 곡선 $y=-(x-t)^2+f(t)$와 x축 및 두 직선 $x=x_1$, $x=x_2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $S(t)$이다.

[문제 2-1]

$a=\dfrac{1}{2}$ 일 때, $S(-2)$와 $S(2)$의 값을 각각 구하시오.

[8점]

[문제 2-2]

$t<0$ 이면 $\dfrac{S(t)}{t^3}=-g(a)$ 이다.

$g(a)=\dfrac{6a^4+pa^3+qa^2+ra+s}{3(1+a)^3}$ 일 때, 네 정수 p, q, r, s 의 값을 각각 구하시오.

[13점]

[문제 2-3]

$$\frac{S(t)}{t^3}=\begin{cases}-g(a) & (t<0)\\ h(a) & (t>0)\end{cases}$$ 일 때,

$\lim\limits_{a\to 0+}\dfrac{g(a)}{h(a)}$ 와 $\lim\limits_{a\to 1-}\dfrac{g(a)}{(1-a)^3h(a)}$ 의 값을 각각 구하시오.

[14점]

3. 출제 의도

[문제 2-1]

- 이차방정식을 이용하여 주어진 두 이차함수의 그래프의 교점을 구할 수 있는지 알아본다.
- 주어진 조건을 만족시키는 도형의 넓이를 해석하고 이해할 수 있는지 알아본다.
- 다항함수의 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제 2-2]

- 일반적인 조건에서 두 이차함수의 그래프의 교점을 구할 수 있는지 알아본다.
- 다항함수의 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 계산할 수 있는지 알아본다.
- 주어진 식을 한 문자로 정리하여 표현하고, 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 2-3]

- 함수의 극한의 성질을 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>2-1</td><td>[수학Ⅱ]-(2)미분-③ 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
[수학Ⅱ]-(3)적분-③ 정적분의 활용
[12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>2-2</td><td>[수학]-(1)문자와 식-② 나머지정리
[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.
[수학Ⅱ]-(2)미분-③ 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
[수학Ⅱ]-(3)적분-③ 정적분의 활용
[12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>2-3</td><td>[수학Ⅱ]-(1)함수의 극한과 연속-① 함수의 극한
[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
[수학Ⅱ]-(3)적분-③ 정적분의 활용
[12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학	김원경 외 14인	비상교육	2020	24~26		
	수학	황선욱 외 8인	미래엔	2020	26~27		
	수학Ⅱ	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2021	10~24, 93~96, 132~139		
	수학Ⅱ	류희찬 외 10인	천재교과서	2020	12~28, 92~96, 131~138		

5. 문항 해설

[문제 2-1]

· 이차방정식을 이용하여 주어진 두 이차함수의 그래프의 교점을 구한다.

· 다항함수의 정적분을 이용하여 $S(-2)$와 $S(2)$의 값을 구한다.

[문제 2-2]

· 이차방정식을 이용하여 주어진 두 이차함수의 그래프의 교점을 구한다.
· 다항함수의 정적분을 이용하여 $t<0$일 때 $S(t)$의 식을 계산한다.
· $S(t)$를 정리하여 $g(a)$를 구하고, 항등식의 성질을 이용하여 미정계수의 값을 구한다.

[문제 2-3]

· 다항함수의 정적분을 이용하여 $t>0$일 때 $S(t)$의 식을 계산하고 $h(a)$를 구한다.
· $h(a)$와 [문제 2-2]에서 구한 $g(a)$를 통해 주어진 극한값을 구한다.

6. 채점 기준

[문제 2-1]

· $t=-2$일 때, $y=f(x)$의 그래프와 곡선 $y=-(x+2)^2+2$의 두 교점의 x좌표 (1)을 구하고, 두 직선 $x=x_1$, $x=x_2$와 x축 및 곡선 $y=-(x+2)^2+2$의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이 (4)를 구할 수 있으면 +4점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(2점) : 방정식으로부터 두 교점의 x좌표 -2, $-\frac{2}{3}$를 구할 수 있다.
- A(4점) : 적분값을 구하여 넓이 (4)를 구할 수 있다.

· $t=2$일 때, $y=f(x)$의 그래프와 곡선 $y=-(x-2)^2-2$가 만나는 두 교점의 x좌표 (2)를 구하고, 두 직선 $x=x_1$, $x=x_2$와 x축 및 곡선 $y=-(x-2)^2-2$의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이 (6)을 구할 수 있으면 +4점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(2점) : 방정식으로부터 두 교점의 x좌표 2, 6을 구할 수 있다.
- A(4점) : 적분값을 구하여 넓이 (6)을 구할 수 있다.

[문제 2-2]

· $t<0$에서 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 $y=-(x-t)^2+at^2$이 만나는 두 교점의 x좌표 (7)을 구하면 +4점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(1점) : 두 교점을 구하기 위한 방정식 $ax^2=-(x-t)^2+at^2$을 작성할 수 있다.
- A(4점) : 방정식으로부터 두 교점의 x좌표 (7)을 구할 수 있다.

· 곡선 $y=-(x-t)^2+at^2$과 x축 및 두 직선 $x=x_1$, $x=x_2$로 둘러싸인 영역의 넓이 $S(t)$를 구할 수 있으면 +5점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(2점) : 두 교점의 x좌표에 관한 부등식 (8)을 고려하여 적분식 (9)를 표현할 수 있다.
- A(5점) : 적분값을 구하여 넓이를 식 (11)로 표현할 수 있다.

· $S(t)$를 이용해서 $g(a)$를 계산하여 p, q, r, s의 값을 구할 수 있으면 +4점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- D(1점) : p, q, r, s 중 1개를 구할 수 있다.
- C(2점) : p, q, r, s 중 2개를 구할 수 있다.
- B(3점) : p, q, r, s 중 3개를 구할 수 있다.
- A(4점) : p, q, r, s 중 4개를 구할 수 있다.

[문제 2-3]

・$t<0$일 때 $g(a)$와 $t>0$일 때 $h(a)$를 구할 수 있으면 +4점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(2점) : $g(a)$와 $h(a)$ 중 하나만 구할 수 있다.
- A(4점) : $g(a)$와 $h(a)$를 모두 구할 수 있다.

・$g(a)$와 $h(a)$를 이용해서 $\lim\limits_{a\to 0+}\dfrac{g(a)}{h(a)}$와 $\lim\limits_{a\to 1-}\dfrac{g(a)}{(1-a)^3h(a)}$를 구할 수 있으면 +10점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(5점) : (21), (22) 중 하나만 구할 수 있다.
- A(10점) : (21), (22)를 모두 구할 수 있다.

7. 예시 답안

[문제 2-1]

$a=\dfrac{1}{2}$이면 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 & (x<0)\\ -\dfrac{1}{2}x^2 & (x\geq 0)\end{cases}$이다.

곡선 $y=-(x-t)^2+f(t)$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는

$t<0$일 때, 이차방정식 $-(x-t)^2+\dfrac{1}{2}t^2=\dfrac{1}{2}x^2$의 두 실근이므로

이차방정식을 정리하여 풀면 $\dfrac{3}{2}x^2-2tx+\dfrac{1}{2}t^2=0$에서 $x=t$ 또는 $x=\dfrac{t}{3}$이고

$t=-2$이면

$$x=-2 \text{ 또는 } x=-\frac{2}{3} \tag{1}$$

이다.

곡선 $y=-(x-t)^2+f(t)$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는

$t>0$일 때, 이차방정식 $-(x-t)^2-\dfrac{1}{2}t^2=-\dfrac{1}{2}x^2$의 두 실근이므로

이차방정식을 정리하여 풀면 $\dfrac{1}{2}x^2-2tx+\dfrac{3}{2}t^2=0$에서 $x=t$ 또는 $x=3t$이고 $t=2$

이면

$$x=2 \text{ 또는 } x=6 \tag{2}$$

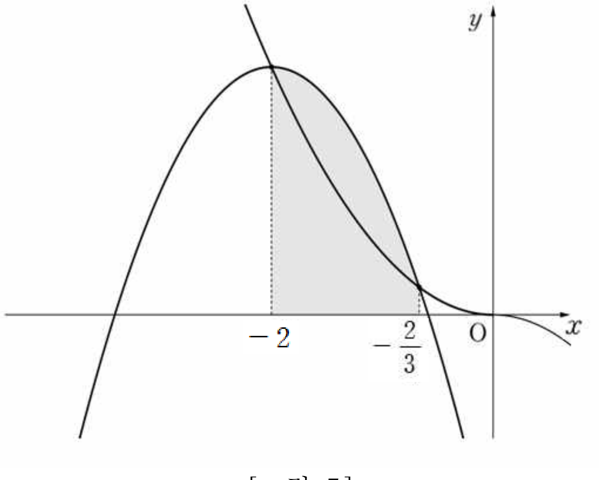
이다.

따라서

$$S(-2)=\int_{-2}^{-\frac{2}{3}}\left|-(x+2)^2+2\right|dx \tag{3}$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-2x^2-2x\right]_{-2}^{-\frac{2}{3}}=\frac{152}{81} \tag{4}$$

이고,

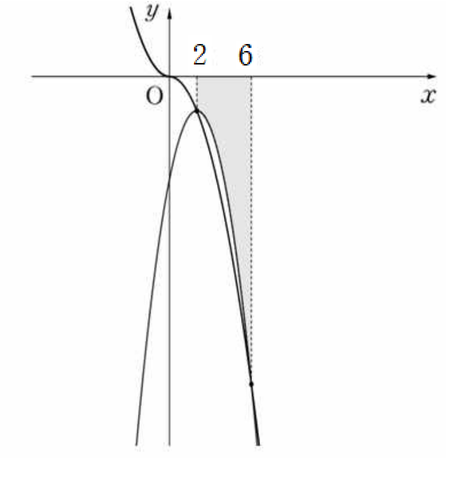


[그림 5]

$$S(2)=\int_{2}^{6}\left|-(x-2)^2-2\right|dx \tag{5}$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+6x\right]_{2}^{6}=\frac{88}{3} \tag{6}$$

이다.



[그림 6]

[문제 2-1의 별해]

$a=\frac{1}{2}$ 이면 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & (x<0)\\ -\frac{1}{2}x^2 & (x\ge 0)\end{cases}$ 이다.

$t=-2$ 일 때,

곡선 $y=-(x+2)^2+2$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는

이차방정식 $-(x+2)^2+2=\frac{1}{2}x^2$의 두 실근이므로

이차방정식을 정리하여 풀면 $\frac{3}{2}x^2+4x+2=0$에서

$$x=-2 \text{ 또는 } x=-\frac{2}{3} \tag{1}$$

이고

$t=2$일 때, 이차방정식 $-(x-2)^2-2=-\frac{1}{2}x^2$의 두 실근이므로

이차방정식을 정리하여 풀면 $\frac{1}{2}x^2-4x+6=0$에서

$$x=2 \text{ 또는 } x=6 \tag{2}$$

이다.

따라서

$$S(-2)=\int_{-2}^{-\frac{2}{3}}\left|-(x+2)^2+2\right|dx \tag{3}$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-2x^2-2x\right]_{-2}^{-\frac{2}{3}}=\frac{152}{81} \tag{4}$$

이고,

$$S(2)=\int_{2}^{6}\left|-(x-2)^2-2\right|dx \tag{5}$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+6x\right]_{2}^{6}=\frac{88}{3} \tag{6}$$

이다.

[문제 2-2]

$t<0$ 이면 곡선 $y=-(x-t)^2+f(t)$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는 이차방정식 $-(x-t)^2+at^2=ax^2$의 두 실근이므로

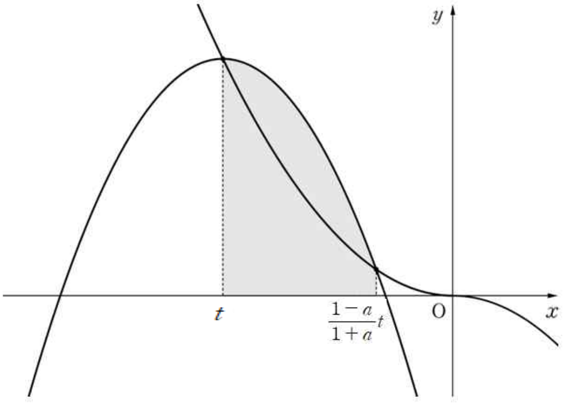
이차방정식을 정리하여 풀면 $(a+1)x^2-2tx+t^2-at^2=0$ 에서

$$x=t \text{ 또는 } x=\frac{1-a}{1+a}t \tag{7}$$

이때 $t<0,\ 0<a<1$ 이므로

$$t<\frac{1-a}{1+a}t \tag{8}$$

이다.



[그림 7]

따라서

$$\begin{aligned}
S(t)&=\int_t^{\frac{1-a}{1+a}t}\left|-(x-t)^2+at^2\right|dx\\
&=\int_t^{\frac{1-a}{1+a}t}\{-(x-t)^2+at^2\}dx \qquad (9)\\
&=\left[-\frac{1}{3}x^3+tx^2+(at^2-t^2)x\right]_t^{\frac{1-a}{1+a}t}\\
&=-\frac{1}{3}\left\{\frac{(1-a)^3}{(1+a)^3}t^3-t^3\right\}+t\left\{\frac{(1-a)^2}{(1+a)^2}t^2-t^2\right\}+(a-1)t^2\left(\frac{1-a}{1+a}t-t\right)\\
&=t^3\times\left\{-\frac{1}{3}\times\frac{-2a^3-6a}{(1+a)^3}+\frac{-4a}{(1+a)^2}+\frac{-2a^2+2a}{1+a}\right\} \qquad (10)\\
&=-\frac{t^3}{3}\times\left\{\frac{-2a^3-6a}{(1+a)^3}+(-3)\times\frac{-4a(1+a)}{(1+a)^3}+(-3)\times\frac{(-2a^2+2a)(1+a)^2}{(1+a)^3}\right\}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{t^3}{3} \times \left\{ \frac{-2a^3-6a}{(1+a)^3} + \frac{12a^2+12a}{(1+a)^3} + \frac{6a^4+6a^3-6a^2-6a}{(1+a)^3} \right\}$$
$$= -\frac{t^3}{3} \times \frac{6a^4+4a^3+6a^2}{(1+a)^3} \tag{11}$$

이고

$$\frac{S(t)}{t^3} = -g(a) = -\frac{6a^4+4a^3+6a^2}{3(1+a)^3}\ (t<0) \tag{12}$$

이므로

$$g(a) = \frac{6a^4+4a^3+6a^2}{3(1+a)^3} \tag{13}$$

에서

$$p=4,\ q=6,\ r=0,\ s=0 \tag{14}$$

이다.

[문제 2-3]

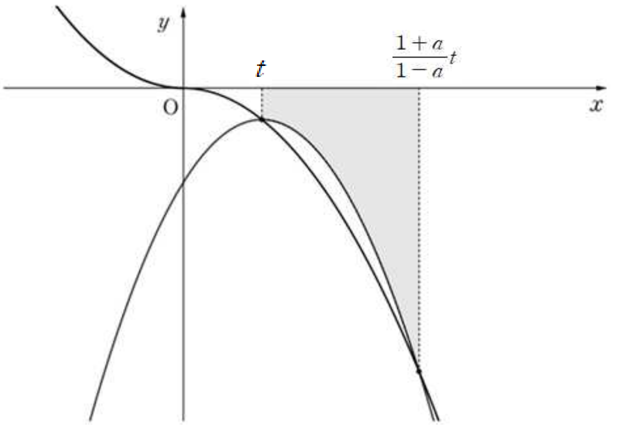
$t>0$ 이면 곡선 $y=-(x-t)^2+f(t)$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는 이차방정식 $-(x-t)^2-at^2=-ax^2$의 두 실근이므로
이차방정식을 정리하여 풀면 $(a-1)x^2+2tx-t^2-at^2=0$ 에서

$$x=t \text{ 또는 } x=\frac{1+a}{1-a}t \tag{15}$$

이때 $t>0$, $0<a<1$ 이므로

$$t<\frac{1+a}{1-a}t \tag{16}$$

이다.



[그림 8]

따라서

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \int_t^{\frac{1+a}{1-a}t} \left| -(x-t)^2 - at^2 \right| dx \\
&= \int_t^{\frac{1+a}{1-a}t} \{(x-t)^2 + at^2\} dx \qquad (17) \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + (at^2+t^2)x \right]_t^{\frac{1+a}{1-a}t} \\
&= \frac{1}{3}\left\{ \frac{(1+a)^3}{(1-a)^3}t^3 - t^3 \right\} - t\left\{ \frac{(1+a)^2}{(1-a)^2}t^2 - t^2 \right\} + (a+1)t^2\left(\frac{1+a}{1-a}t - t \right) \\
&= t^3 \times \left\{ \frac{1}{3} \times \frac{2a^3+6a}{(1-a)^3} - \frac{4a}{(1-a)^2} + \frac{2a^2+2a}{1-a} \right\} \\
&= \frac{t^3}{3} \times \left\{ \frac{2a^3+6a}{(1-a)^3} - 3 \times \frac{4a(1-a)}{(1-a)^3} + 3 \times \frac{(2a^2+2a)(1-a)^2}{(1-a)^3} \right\} \qquad (18) \\
&= \frac{t^3}{3} \times \left\{ \frac{2a^3+6a}{(1-a)^3} + \frac{12a^2-12a}{(1-a)^3} + \frac{6a^4-6a^3-6a^2+6a}{(1-a)^3} \right\} \\
&= \frac{t^3}{3} \times \frac{6a^4-4a^3+6a^2}{(1-a)^3} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

이고

$$\frac{S(t)}{t^3} = h(a) = \frac{6a^4-4a^3+6a^2}{3(1-a)^3} \ (t>0) \qquad (20)$$

이다.

[문제 2-2] 에서 $g(a) = \dfrac{6a^4+4a^3+6a^2}{3(1+a)^3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0+}\frac{g(a)}{h(a)} &= \lim_{a\to 0+}\frac{(6a^4+4a^3+6a^2)(1-a)^3}{(6a^4-4a^3+6a^2)(1+a)^3} \\ &= \lim_{a\to 0+}\frac{(6a^2+4a+6)(1-a)^3}{(6a^2-4a+6)(1+a)^3} \\ &= \frac{6\times 1}{6\times 1} = 1\end{aligned} \tag{21}$$

이고

$$\lim_{a\to 1-}\frac{g(a)}{(1-a)^3 h(a)} = \lim_{a\to 1-}\frac{(6a^4+4a^3+6a^2)}{(6a^4-4a^3+6a^2)(1+a)^3} = \frac{16}{8\times 8} = \frac{1}{4} \tag{22}$$

이다.

2026학년도 수시모집 논술전형 논술고사 문항해설 및 채점기준 [자연계열Ⅱ(약학대학)]

[덕성여자대학교 문항정보 3]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅱ(약학대학) / 문제번호 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	두 점 사이의 거리, 점과 직선 사이의 거리, 수열의 합, 함수의 극한, 함수의 극한의 대소 관계, 치환적분을 이용한 정적분
예상 소요 시간	총 90분 중 40분 소요 예상	

2. 문항 및 제시문

[문제3] [40점]

(가) <함수의 극한의 대소 관계>

함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$(L, M은 실수)일 때,

a에 가까운 모든 실수 x에서

① $f(x) \le g(x)$이면 $L \le M$

② 함수 $h(x)$가 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $L = M$이면 $\lim_{x\to a} h(x) = L$

※ 함수의 극한의 대소 관계는

$x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때에도 성립한다.

(나) 좌표평면 위에 5개의 선분 l_0, l_1, l_2, l_3, l_4와 이 선분들 위에 있지 않은 점 P가 존재한다. 선분 l_k를 포함하는 직선과 점 P 사이의 거리를 $d_k(l_k, \mathrm{P})$, 선분 l_k 위의 한 점 (x, y)와 점 P 사이의 거리의 제곱을 $w_k(l_k, \mathrm{P})$라고 할 때, $f_k(l_k, \mathrm{P})$와 $F_k(l_k, \mathrm{P})$를 다음과 같이 정의한다. (단, $k = 0, 1, 2, 3, 4$)

$$f_k(l_k,\ \mathrm{P}) = \frac{\mathrm{d_k}(\mathrm{l_k},\ \mathrm{P})}{w_k(l_k,\ \mathrm{P})}\ ,\quad F_k(l_k,\ \mathrm{P}) = \frac{1}{w_k(l_k,\ \mathrm{P})}$$

[문제 3-1]

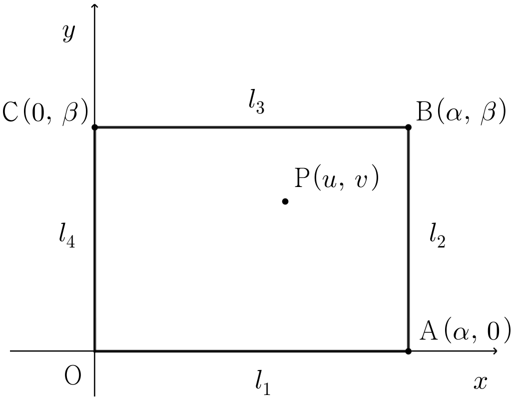
선분 l_0의 양 끝 점은 $(-5, 5)$, $(-1, 1)$이다. 점 P의 좌표가 $(-1, 5)$일 때, 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_{-5}^{-1} f_0(l_0,\ \mathrm{P})dx$$

[12점]

[문제 3-2]

그림과 같이 네 개의 선분 l_1, l_2, l_3, l_4로 이루어진 직사각형 OABC가 있다.



이 직사각형 내부의 한 점 P의 좌표가 (u, v)이고 다음과 같이 a_k를 정의할 때, $\sum_{k=1}^{4} a_k$의 값을 구하시오. (단, $0 < u < \alpha$, $0 < v < \beta$)

$$a_k = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\alpha} f_k(l_k,\ \mathrm{P})dx & (k = 1, 3) \\[2ex] \displaystyle\int_0^{\beta} f_k(l_k,\ \mathrm{P})dy & (k = 2, 4) \end{cases}$$

[13점]

[문제 3-3]

[문제 3-2]에 이어서 다음과 같이 A_k 와 C를 정의할 때, $\lim_{u \to \alpha-} C$의 값을 구하시오.

(단, v는 상수이다.)

$$A_k = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\alpha} F_k(l_k,\ \mathrm{P})dx & (k=1,3) \\ \displaystyle\int_0^{\beta} F_k(l_k,\ \mathrm{P})dy & (k=2,4) \end{cases}, \quad C = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{4} a_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{4} A_k}$$

[15점]

3. 출제 의도

[문제 3-1]

・두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있는지 알아본다.
・두 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지 알아본다.
・$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$의 관계를 활용해서 치환적분을 할 수 있는지 알아본다.

[문제 3-2]

・보다 일반적이고 복잡한 상황에서 $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$의 관계를 활용해서 치환적분을 할 수 있는지 알아본다.
・치환적분에서 새로운 적분 변수 θ의 범위를 올바로 적용하고 그 의미를 해석할 수 있는지 알아본다.
・복잡해 보이는 문제 상황을 단순한 문제로 해석할 수 있는지 알아본다.

[문제 3-3]

・적분 계산에 영향을 미치지 않는 독립적인 요소를 파악할 수 있는지 알아본다.
・제시문을 통해 제시된 함수의 극한의 대소 관계를 이용해서 극한값을 계산할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
3	3-1	**[수학]-(2)기하-[2] 직선의 방정식** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. **[미적분]-(3)적분법-[1] 여러 가지 적분법** [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	3-2	**[수학Ⅰ]-(3)수열-[2] 수열의 합** [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[미적분]-(3)적분법-[1] 여러 가지 적분법** [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	3-3	**[수학Ⅰ]-(3)수열-[2] 수열의 합** [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(1)함수의 극한과 연속-[1] 함수의 극한** [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. **[미적분]-(3)적분법-[1] 여러 가지 적분법** [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학	고성은 외 6명	좋은책 신사고	2018	106, 120, 126		
	수학Ⅰ	김원경 외 14명	비상	2018	139		
	수학Ⅱ	박교식 외 19명	동아출판	2018	14, 24		
	미적분	고성은 외 5명	좋은책 신사고	2019	142, 145		
	미적분	이준열 외 7명	천재교육	2019	153		
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	149		

5. 문항 해설

[문제 3-1]

・선분 l_0을 포함하는 직선의 방정식을 구하고 이 직선과 이 직선에 포함되지 않은 점 P와의 거리 $d_0(l_0, \mathrm{P})$를 계산한다. (별해) 또는 두 각이 45도인 직각이등변삼각형의 성질을 통해 선분 l_0과 점 P와의 거리 $d_0(l_0, \mathrm{P})$를 구한다.

・두 점 사이의 거리 공식(또는 피타고라스 정리)을 이용해서 두 점 사이의 거리의 제곱인 $w_0(l_0, \mathrm{P})$를 구한다.

・$d_0(l_0, \mathrm{P})$와 $w_0(l_0, \mathrm{P})$로부터 $f_0(l_0, \mathrm{P})$를 구하고 적분을 위해서 x에 대하여 $f_0(l_0, \mathrm{P})$를 정리한다.

・$f_0(l_0, \mathrm{P})$를 -5에서부터 -1까지 x에 대해 정적분을 한다. 이 과정에서 이후에 설명할 탄젠트함수를 이용해서 치환적분을 한다.

・탄젠트함수를 이용해서 치환적분을 하기 위해 적분식 내에서 $f_0(l_0, \mathrm{P})$의 분모를 $k\{(x+3)^2+4\}$(k는 0이 아닌 실수) 형태로 정리한다.

・$f_0(l_0, \mathrm{P})$의 분모의 상수항을 1로 만들어서 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\displaystyle\int_{-5}^{-1}\dfrac{1}{\left(\dfrac{x+3}{2}\right)^2+1}dx$로 정리한다.

・$\tan\theta = \dfrac{x+3}{2} \Rightarrow \sec^2\theta\, d\theta = \dfrac{1}{2}dx \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$로 적분변수 x를 θ로 치환한다.

・$\tan\gamma_2 = 1$, $\tan\gamma_1 = -1$ 에서 정적분의 위끝($x=-1$)과 아래끝($x=-5$)에 해당하는 값 γ_2와 γ_1을 새로운 적분변수 θ에서 찾는다.

・$f_0(l_0, \mathrm{P})$의 분모를 $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$로 변환하고 치환적분해서 최종적으로 값을 얻는다.

[문제 3-2]

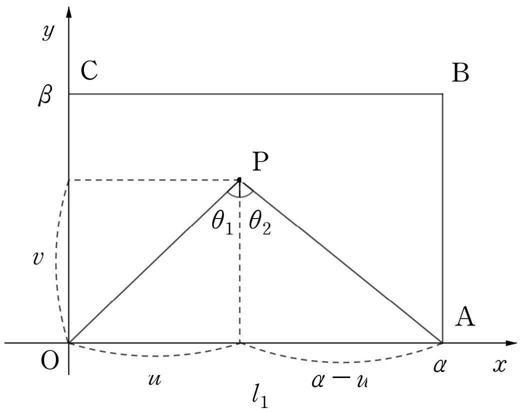
※ 네 개의 선분 l_1, l_2, l_3, l_4 중 임의의 선분에 대해 계산을 시작할 수 있으나 여기에서는 l_1을 기준으로 설명함

・주어진 조건과 정의에 따라 a_1을 정적분으로 표현하고 치환적분하기 위한 준비 단계로 분모의 상수항을 1로 정리한다$\left(a_1 = \displaystyle\int_0^{\alpha}\dfrac{v}{(x-u)^2+v^2}dx = \int_0^{\alpha}\dfrac{v}{v^2\left\{\left(\dfrac{x-u}{v}\right)^2+1\right\}}dx\right)$.

・적분변수 x를 θ로 치환하기 위해 탄젠트함수를 사용하고 θ의 적절한 범위를 지정한다.

・적분변수를 치환하여 $\tan\theta = \dfrac{x-u}{v}$와 $\dfrac{d\theta}{dx}$를 구한다.

・치환적분하고 $\tan\xi_2 = \dfrac{\alpha-u}{v}$, $\tan\xi_1 = -\dfrac{u}{v}$ 관계에서 점 P가 네 개의 선분으로 이루어진 직사각형 내부에 있을 때 $a_1 = \theta_2 + \theta_1$이 $\angle\mathrm{APO}$의 크기와 같음을 설명한다.



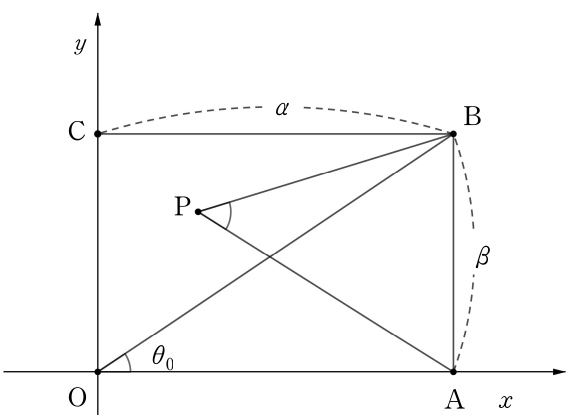
· a_1을 계산한 결과를 바탕으로 a_2, a_3, a_4에 대해서도 직접 위와 같이 계산하거나 유추를 통해 $\sum_{k=1}^{4} a_k = 2\pi$를 얻는다.

[문제 3-3]

· 선분 l_k를 포함하는 직선과 점 P 사이의 거리 $d_k(l_k, \mathrm{P})$는 적분 변수 x, y와는 독립적이기 때문에 a_k는 A_k에 거리 $d_k(l_k, \mathrm{P})$를 곱한 값임을 찾는다($a_k = d_k(l_k, \mathrm{P}) \times A_k$).

· C를 계산하기 위해 분자는 [문제 3-2]에서 계산한 결과인 2π이며 분모는 각 선분 $l_k\,(k=1, 2, 3, 4)$와 점 P가 이루는 삼각형에서 점 P의 각도를 l_k와 P 사이의 거리로 나눈 값들을 합한 값임을 찾는다. $C = \dfrac{2\pi}{\dfrac{\angle \mathrm{APO}}{v} + \dfrac{\angle \mathrm{BPA}}{\alpha - \mathrm{u}} + \dfrac{\angle \mathrm{CPB}}{\beta - \mathrm{v}} + \dfrac{\angle \mathrm{OPC}}{\mathrm{u}}}$

· 아래 그림에서 $\theta_0 = \angle \mathrm{BOA}$라고 할 때 원주각의 성질을 이용하여 $\theta_0 < \angle \mathrm{BPA}$임을 설명한다.



· 제시문 (가)를 활용하여 $u \to \alpha -$일 때 $\dfrac{\angle \mathrm{BPA}}{\alpha - u} \to \infty$임을 설명하고, 이를 통해 $\lim_{u \to \alpha -} C = 0$임을 구한다.

6. 채점 기준

[문제 3-1]

• (1) 또는 (2)에서 제시한 방법으로 $d_0(l_0, \mathrm{P}) = 2\sqrt{2}$를 정확히 구하면 +2점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(1점) : (1) 또는 (2)에서 제시한 방법을 정확히 적용하였으나 $2\sqrt{2}$를 구하지 못한다.
- A(2점) : (1) 또는 (2)에서 제시한 방법을 정확히 적용하였고 $2\sqrt{2}$를 정확히 구할 수 있다.

• (4)에서 $f_0(l_0, \mathrm{P})$을 정확히 구하면 +1점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못하거나 $f_0(l_0, \mathrm{P})$를 구하지 못한다.
- A(1점) : $f_0(l_0, \mathrm{P})$을 정확히 구할 수 있다.

• (6)에서 치환적분을 위해 $\tan\theta = \frac{x+3}{2}$으로 치환하고 $\frac{d\theta}{dx}$를 구하고 θ의 범위를 정확히 구하면 +3점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- C(1점) : $\tan\theta = \frac{x+3}{2}$을 정확히 구했으나 $\frac{d\theta}{dx}$를 정확히 구하지 못한다.
- B(2점) : $\tan\theta = \frac{x+3}{2}$과 $\frac{d\theta}{dx}$를 정확히 구했으나 θ의 범위를 구하지 못한다.
- A(3점) : $\tan\theta = \frac{x+3}{2}$과 $\frac{d\theta}{dx}$와 θ의 범위를 정확히 구할 수 있다.

• (7)에서 γ_1, γ_2를 정확히 계산하면 +3점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못하거나 답을 정확히 구하지 못한다.
- A(3점) : γ_1, γ_2를 정확히 구할 수 있다.

• (9)에서 최종적으로 값을 정확히 구하면 +3점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못하거나 정확히 구하지 못한다.
- B(1점) : 정적분의 전개는 정확하나 답을 정확히 구하지 못한다.
- A(3점) : $\int_{-5}^{-1} f_0(l_0, \mathrm{P})dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$를 정확히 구할 수 있다.

[문제 3-2]

• (11)에서처럼 a_1(또는 a_2, a_3, a_4 중 하나)을 정확히 구하면 +2점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.

- A(2점) : 정확히 구할 수 있다.

• (12), (13)에서 θ의 범위와 $\frac{d\theta}{dx}$를 정확히 구하면 +2점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못하거나 정확히 구하지 못한다.
- B(1점) : $\frac{d\theta}{dx}$를 정확히 구했으나 θ의 범위를 정확히 구하지 못한다.
- A(2점) : $\frac{d\theta}{dx}$와 θ의 범위를 정확히 구할 수 있다.

• (14)와 (15)에서 정적분을 정확히 구하고 최종적으로 $a_1 = \xi_2 - \xi_1$을 구하면 +2점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못하거나 정확히 구하지 못한다.
- B(1점) : (14)의 결과를 정확히 구했으나 (15)의 결과를 정확히 구하지 못한다.
- A(2점) : (14)와 (15)에서 정확히 정적분을 하고 최종적으로 $a_1 = \xi_2 - \xi_1$을 구할 수 있다.

• (16) 및 (17)에서 탄젠트함수의 정의에 의해 (17)의 결과를 얻으면 +3점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- A(3점) : a_1이 (16)에서 $\angle \mathrm{APO}$의 크기와 동일함을 설명할 수 있다.

• (18)~(20)에서 다른 선분에서의 경우로 확장하여 최종적으로 $\sum_{k=1}^{4} a_k = 2\pi$임을 구하면 +4점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(1점) : 다른 선분에서의 경우로 확장하였으나 최종적으로 $\sum_{k=1}^{4} a_k = 2\pi$를 구하지 못한다.
- A(4점) : 다른 선분에서의 경우로 확장하여 최종적으로 $\sum_{k=1}^{4} a_k = 2\pi$임을 구할 수 있다.

[문제 3-3]

• (21)과 (22)에서 최종적으로 (23)을 구하면 +3점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(2점) : 거리 $d_k(l_k, \mathrm{P})$가 적분 변수 x, y와 독립적임(또는 x, y에 대해 상수)을 설명하지 않고 (23)을 구할 수 있다.
- A(3점) : 거리 $d_k(l_k, \mathrm{P})$가 적분 변수 x, y와 독립적임(또는 x, y에 대해 상수)을 설명하고 (23)을 정확히 구할 수 있다.

• (24)와 같이 C를 정확히 구하면 +3점

- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.

- C(1점) : (24)에서처럼 정확히 C를 구하지는 못했으나 분자는 상수, 분모는 각도와 거리의 함수로 구할 수 있다.
- B(2점) : (24)와 같이 정확히 C를 구하지는 못했으나 분자는 2π로 정확히 구할 수 있다.
- A(3점) : (24)와 같이 C를 정확히 구할 수 있다.

・(25)에서 x좌표 값이 감소하면 $\angle \mathrm{BPA}$의 크기도 감소하고 θ_0가 $\angle \mathrm{BPA}$의 크기보다 항상 작다는 사실을 설명하면 +3점
- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(2점) : x좌표 값이 감소하면 $\angle \mathrm{BPA}$의 크기도 감소함을 설명했거나 θ_0가 $\angle \mathrm{BPA}$의 크기보다 항상 작다는 사실을 설명했지만 둘 다 동시에 설명하지 못한다.
- A(3점) : x좌표 값이 감소하면 $\angle \mathrm{BPA}$의 크기도 감소함을 설명하고 θ_0가 $\angle \mathrm{BPA}$의 크기보다 항상 작다는 사실을 설명할 수 있다.

・(26)에서 $\dfrac{\theta_1+\theta_2}{v}$, $\dfrac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-u}$, $\dfrac{\theta_5+\theta_6}{\beta-v}$, $\dfrac{\theta_7+\theta_8}{u}$은 모두 양수이므로 $0 \le C \le \dfrac{2\pi(\alpha-u)}{\theta_0}$임을 설명하거나, (28)에서 $0 < \dfrac{\theta_0}{\alpha-u} < \dfrac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-u}$이고 $0 < \dfrac{2\pi}{\dfrac{\theta_1+\theta_2}{v}+\dfrac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-u}+\dfrac{\theta_5+\theta_6}{\beta-v}+\dfrac{\theta_7+\theta_8}{u}}$ 임을 설명하면 +3점
- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- C(1점) : 모두 양수임을 설명하였으나 부등식을 정확히 구할 수 없다.
- B(2점) : 부등식을 정확히 구하였으나 모두 양수임을 설명할 수 없다.
- A(3점) : 모두 양수임을 설명하고 부등식을 정확히 구할 수 있다.

・(27)에서 제시문 (가)의 내용을 활용하여 $\displaystyle\lim_{u\to\alpha-}\frac{2\pi(\alpha-u)}{\theta_0}=0$ 이므로 $\displaystyle\lim_{u\to\alpha-} C=0$ 임을 설명하거나, (29)에서 제시문 (가)의 내용을 활용하여 $\displaystyle\lim_{u\to\alpha-}\frac{\theta_0}{\alpha-u}=\infty$ 이므로 $\displaystyle\lim_{u\to\alpha-}\frac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-u}=\infty$ 이고 $\displaystyle\lim_{u\to\alpha-} C=0$ 임을 설명하면+3점
- E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(2점) : 제시문 (가)의 내용을 활용하여 설명할 수 없었으나 정답을 정확히 구할 수 있다.
- A(3점) : 제시문 (가)의 내용을 활용하여 정답을 정확히 구할 수 있다.

7. 예시 답안

[문제 3-1]

풀이 1)

선분 l_0을 포함하는 직선의 방정식은 $y-1=\frac{5-1}{-5-(-1)}(x-(-1))$로 구할 수 있으며 이 직선의 방정식은 $y=-x$이다. 주어진 조건에서 $d_0(l_0,\mathrm{P})$와 $w_0(l_0,\mathrm{P})$를 구하면 (1)

$$d_0(l_0,\mathrm{P})=\frac{|-1+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$$

풀이 2)

선분 l_0은 x축과 양의 방향으로 135°를 이루고 있으므로 두 꼭지점의 각도가 45°인 직각이등변삼각형의 관계를 통해 P와 선분 l_0의 거리 $d_0(l_0,\mathrm{P})=2\sqrt{2}$임을 알 수 있다. (2)

$$w_0(l_0,\mathrm{P})=(\sqrt{(x-(-1))^2+(y-5)^2})^2=(x+1)^2+(-x-5)^2$$
$$=2x^2+12x+26 \quad (3)$$

$$\Rightarrow f_0(l_0,\mathrm{P})=\frac{d_0(l_0,\mathrm{P})}{w_0(l_0,\mathrm{P})}=\frac{2\sqrt{2}}{2x^2+12x+26}=\frac{\sqrt{2}}{x^2+6x+13} \quad (4)$$

따라서

$$\int_{-5}^{-1}f_0(l_0,\mathrm{P})dx=\int_{-5}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{x^2+6x+13}dx$$
$$=\int_{-5}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{(x+3)^2+4}dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-5}^{-1}\frac{1}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+1}dx \quad (5)$$

치환적분을 하면

$$\tan\theta=\frac{x+3}{2}\Rightarrow \sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}dx\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\begin{cases}\tan\gamma_2=\frac{-1+3}{2}=1\\ \tan\gamma_1=\frac{-5+3}{2}=-1\end{cases} \quad (6)$$

$$\text{이때 }\ \gamma_2=\frac{\pi}{4},\gamma_1=-\frac{\pi}{4}\ \left(\because -\frac{\pi}{2}<\gamma_1,\gamma_2<\frac{\pi}{2}\right) \quad (7)$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-5}^{-1}\frac{1}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\frac{1}{\tan^2\theta+1}2\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec^2\theta}2\sec^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (8)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \tag{9}$$

$$\therefore \int_{-5}^{-1} f_0(l_0,\ \mathrm{P})dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \tag{10}$$

[문제 3-2]

먼저 l_1에 대해서 문제의 정의에 따라

$$a_1 = \int_0^{\alpha} \frac{v}{(x-u)^2+v^2}dx = \int_0^{\alpha} \frac{v}{v^2\left\{\left(\frac{x-u}{v}\right)^2+1\right\}}dx \tag{11}$$

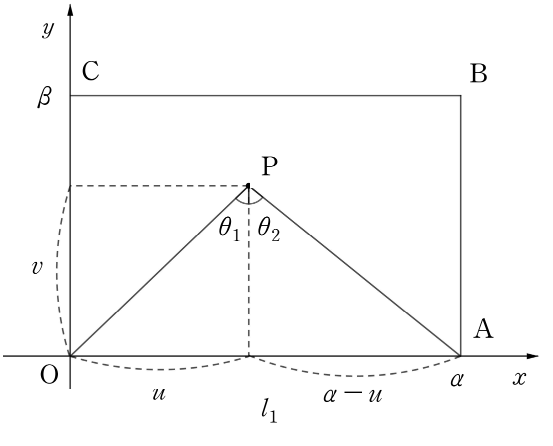
$\tan\theta = \frac{x-u}{v}\left(-\frac{\pi}{2}< \theta < \frac{\pi}{2}\right)$로 치환하고 $\frac{d\theta}{dx}$ 를 구하면 (12)

$$\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{v}dx \tag{13}$$

또한

$$\tan\xi_2 = \frac{\alpha-u}{v},\quad \tan\xi_1 = -\frac{u}{v} \tag{14}$$

$$a_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{v}{v^2(\tan^2\theta+1)} \times v\sec^2\theta\, d\theta = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{v}{v^2\sec^2\theta} \times v\ \sec^2\theta\, d\theta = \int_{\xi_1}^{\xi_2} 1\, d\theta \tag{15}$$
$$= \xi_2 - \xi_1$$



(16)

위 그림에서 각 삼각형에 대한 탄젠트함수의 정의에 의해

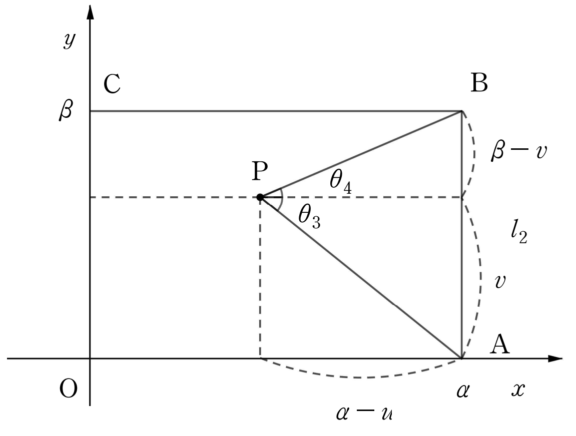
$$\xi_2 = \theta_2,\ \xi_1 = -\theta_1$$

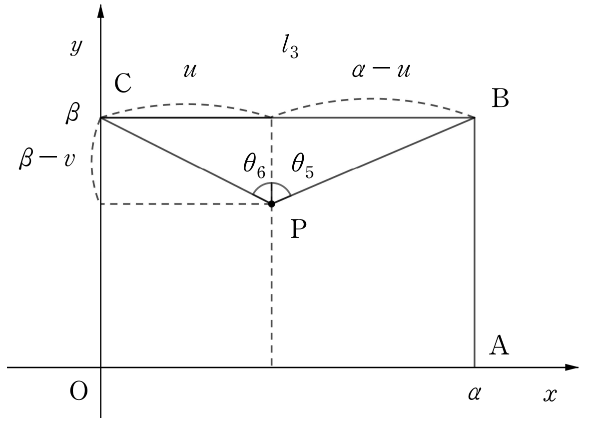
따라서

$$a_1 = \theta_2 + \theta_1 \tag{17}$$

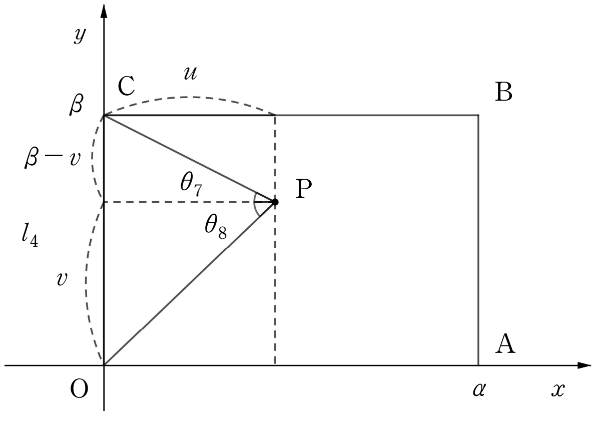
선분 $l_2,\ l_3,\ l_4$에 대해서도 아래 그림들을 참고하여 동일한 방식으로 다음 결과를 얻을 수 있다. (18)

$$a_2 = \theta_3 + \theta_4,\ a_3 = \theta_5 + \theta_6,\ a_4 = \theta_7 + \theta_8$$





(19)



$$\therefore \sum_{k=1}^{4} a_k = 2\pi \qquad (20)$$

[문제 3-3]

선분 l_k를 포함하는 직선과 점 P 사이의 거리 $d_k(l_k, \mathrm{P})$는 적분 변수 x, y와는 독립적인 값이기 때문에 다음이 성립된다.

1) $k=1, 3$일 때

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^\alpha f_k(l_k, \mathrm{P})dx = \int_0^\alpha \frac{d_k(l_k, P)}{w_k(l_k, P)}dx \\ &= d_k(l_k, P)\int_0^\alpha \frac{1}{w_k(l_k, P)}dx = d_k(l_k, P)\int_0^\alpha F_k(l_k, P)dx \\ &= d_k(l_k, P)\times A_k \end{aligned} \tag{21}$$

2) $k=2, 4$일 때

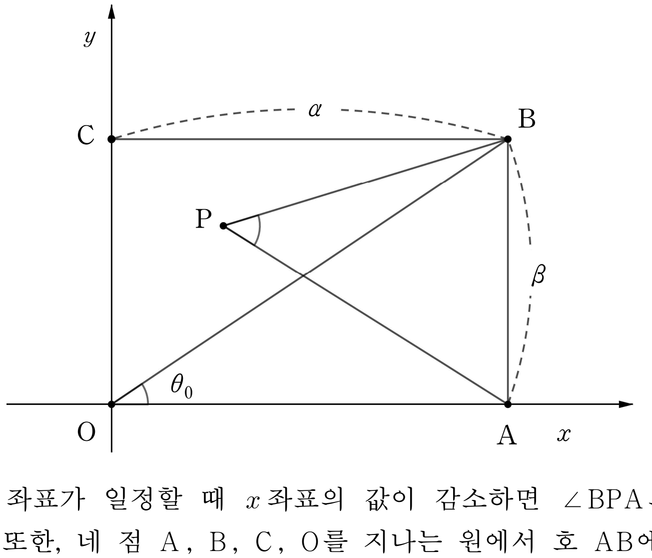
$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^\beta f_k(l_k, \mathrm{P})dy = \int_0^\beta \frac{d_k(l_k, P)}{w_k(l_k, P)}dy \\ &= d_k(l_k, P)\int_0^\beta \frac{1}{w_k(l_k, P)}dy = d_k(l_k, P)\int_0^\beta F_k(l_k, P)dy \\ &= d_k(l_k, P)\times A_k \end{aligned} \tag{22}$$

따라서 $k=1, 2, 3, 4$에 대해

$$a_k = d_k(l_k, P)\times A_k \tag{23}$$

C를 계산하면

$$C = \frac{\sum_{k=1}^{4} a_k}{\sum_{k=1}^{4} A_k} = \frac{\sum_{k=1}^{4} \mathrm{a_k}}{\sum_{k=1}^{4} \frac{\mathrm{a_k}}{d_k(l_k, \mathrm{P})}} = \frac{2\pi}{\frac{\theta_1+\theta_2}{\mathrm{v}} + \frac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-\mathrm{u}} + \frac{\theta_5+\theta_6}{\beta-\mathrm{v}} + \frac{\theta_7+\theta_8}{\mathrm{u}}} \tag{24}$$



(25)

점 P의 y좌표가 일정할 때 x좌표의 값이 감소하면 ∠BPA의 크기도 감소한다. 또한, 네 점 A, B, C, O를 지나는 원에서 호 AB에 대한 원주각의 크기를 θ_0이라고 하면 θ_0은 ∠BPA의 크기보다 항상 작다. 따라서 $\theta_0 < \theta_3 + \theta_4$이다.

$\dfrac{\theta_1+\theta_2}{v}$, $\dfrac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-u}$, $\dfrac{\theta_5+\theta_6}{\beta-v}$, $\dfrac{\theta_7+\theta_8}{u}$ 은 모두 양수이므로

$$0 \le \frac{2\pi}{\dfrac{\theta_1+\theta_2}{v}+\dfrac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-u}+\dfrac{\theta_5+\theta_6}{\beta-v}+\dfrac{\theta_7+\theta_8}{u}} < \frac{2\pi}{\dfrac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-u}} \tag{26}$$

$$= \frac{2\pi(\alpha-u)}{\theta_3+\theta_4} < \frac{2\pi(\alpha-u)}{\theta_0}$$

$\displaystyle\lim_{u\to\alpha-}\frac{2\pi(\alpha-u)}{\theta_0}=0$ 이므로 $\displaystyle\lim_{u\to\alpha-}C=0$ 이다. (27)

(별해)

$0<\alpha-u$ 이므로 $0<\dfrac{\theta_0}{\alpha-u}<\dfrac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-u}$ 이고,

$\dfrac{\theta_1+\theta_2}{v}$, $\dfrac{\theta_5+\theta_6}{\beta-v}$, $\dfrac{\theta_7+\theta_8}{u}$ 은 모두 양수이므로 (28)

$0<\dfrac{2\pi}{\dfrac{\theta_1+\theta_2}{v}+\dfrac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-u}+\dfrac{\theta_5+\theta_6}{\beta-v}+\dfrac{\theta_7+\theta_8}{u}}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{u\to\alpha-}\frac{\theta_0}{\alpha-u}=\infty$ 이므로 $\displaystyle\lim_{u\to\alpha-}\frac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-u}=\infty$ 이고

$$\lim_{u\to\alpha-}C=\lim_{u\to\alpha-}\frac{2\pi}{\dfrac{\theta_1+\theta_2}{v}+\dfrac{\theta_3+\theta_4}{\alpha-u}+\dfrac{\theta_5+\theta_6}{\beta-v}+\dfrac{\theta_7+\theta_8}{u}}=0 \tag{29}$$