

2026학년도 수시모집 논술전형 논술고사 문항해설 및 채점기준 [자연계열 I (과학기술대학)]

[덕성여자대학교 문항정보 1]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I (과학기술대학) / 문제번호 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I
	핵심개념 및 용어	도형의 방정식, 삼각함수, 수열의 귀납적 정의, 등차수열과 등비수열, 수열의 합
예상 소요 시간	총 90분 중 45분 소요 예상	

2. 문항 및 제시문

[문제1] [40점]

반지름의 길이가 1인 원에 아래의 조건을 만족하는 도형을 그린다.

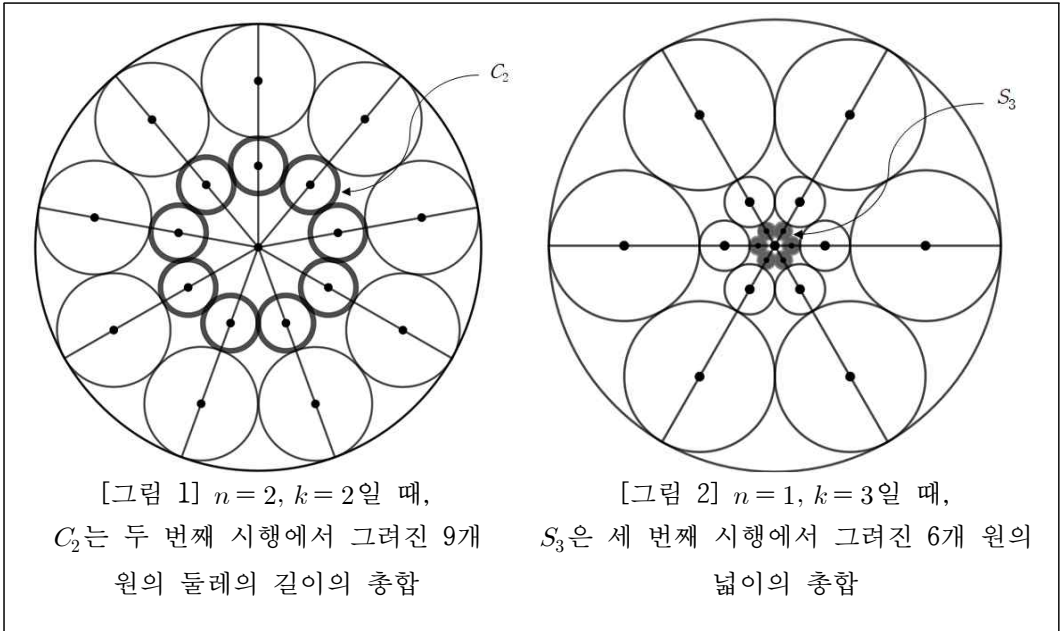
수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 3n + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이다.

(가) 첫 번째 시행에서는, 반지름의 길이가 r_1 인 a_n 개의 원을 서로 외접하면서 반지름의 길이가 1인 원에 내접하게 그린다.

(나) 두 번째 시행에서는, 첫 번째 시행된 결과에 추가로 반지름의 길이가 r_2 (단, $r_1 > r_2$)인 a_n 개의 원들을 서로 외접하며, 첫 번째 시행의 결과에 모두 외접하게 [그림 1]과 같이 그린다.

(다) 이와 같은 방법으로 k 번 시행을 반복할 때, 시행 별로 그려진 원의 반지름 길이는 r_k 이고, 원들은 [그림 1], [그림 2]와 같이 그린다.

(라) [그림 1], [그림 2]와 같이 k 번째 시행에서 그려진 원의 둘레의 길이의 총합을 C_k 라 하고, 원의 넓이의 총합을 S_k 라 한다.



[문제 1-1] $n = 1, k = 2$ 일 때, S_2 와 C_2 의 값을 각각 구하시오.

[9점]

[문제 1-2] $n = 1, k = 10$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} S_k$ 와 $\sum_{k=1}^{10} C_k$ 의 값을 각각 구하시오.

[12점]

[문제 1-3] $n = N$ 일 때, k 번째 시행에서 그려진 원의 반지름의 길이의 일반항 r_k 를 구하시오.

[19점]

3. 출제 의도

[문제 1-1]

- 삼각함수를 이용하여, 한 변의 길이를 구할 수 있는지 알아본다.
- 원의 총 넓이와 원의 총 둘레의 길이를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 1-2]

- 등비수열의 일반항을 이용해 등비수열의 합을 구할 수 있는지 알아본다.
- 주어진 조건을 이용하여 원의 넓이의 총합과 원의 둘레의 길이의 총합을 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 1-3]

- a_n 의 일반항과 사잇각과의 규칙을 찾을 수 있는지 알아본다.
- 반복시행에 따라 변화하는 등비수열의 일반항을 구할 수 있는지 알아본다.
- 수열의 귀납적 정의를 이해하고 활용할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
1	1-1	<p>[수학]-(2)기하-㉓ 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.</p> <p>[수학 I]-(2)삼각함수-㉑ 삼각함수 [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.</p>
	1-2	<p>[수학 I]-(3)수열-㉑ 등차수열과 등비수열 [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.</p> <p>[수학 I]-(3)수열-㉒ 수열의 합 [12수학 I 03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p>
	1-3	<p>[수학 I]-(2)삼각함수-㉑ 삼각함수 [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.</p> <p>[수학 I]-(3)수열-㉓ 수학적 귀납법 [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.</p>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학	권오남 외 13인	(주)교학사	2021	101~103, 131~141		
	수학 I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2020	65~71, 115~118, 123~135		
	수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2021	69~75, 123~126, 130~144		

5. 문항 해설

[문제 1-1]

- 외접하는 두 원의 접점과 반지름이 1인 주어진 원의 중심, 그리고 첫 번째 시행을 통해 그려진 원의 중심 O_1 을 이은 직각삼각형을 만들 수 있다.
- 첫 번째 시행과 두 번째 시행을 통해 그려진 원의 반지름의 길이를 구할 수 있어야 하며, $r_n \cdot r_{n+1}$ 의 귀납적 정의, 삼각함수, 도형의 닮음 등을 풀이에 활용한다.
- 원의 넓이 πr^2 과 원의 둘레의 길이 $2\pi r$ 을 알 수 있다.

[문제 1-2]

- a_1 과 시행 $k = 10$ 이 주어진 상황에서 시행마다 만들어진 원의 넓이의 합과 원의 둘레의 길이의 합을 구한 후, 이를 활용해 $\sum_{k=1}^{10} S_k$ 와 $\sum_{k=1}^{10} C_k$ 의 값을 구할 수 있다.
- 등비수열의 합 공식 $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ 을 활용할 수 있다.

[문제 1-3]

- 반지름의 길이가 1인 주어진 원에 a_n 개의 원이 내접 또는 외접하는 상황에서 시행을 반복해서 생기는 원들의 반지름의 길이 r_k 를 귀납적 정의를 통해 구할 수 있다.
- 2π 의 각을 a_n 개로 나누었을 때 한 각의 크기를 $\frac{2\pi}{a_n}$ 로 놓고 $\sin \frac{2\pi}{a_n}$ 의 값을 삼각함수를 이용하여 r_k, r_{k+1} 로 나타낼 수 있다.
- 귀납적 정의로 표현된 식으로부터 등비수열의 일반항을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

[문제 1-1]

- (1)과 같이 도형에서 삼각함수를 이용해 r_1 을 구하면 +3점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(2점) : 삼각함수를 이용해 r_1 에 관한 (1) 또는 (4)와 같이 식만 구할 수 있다.
 - A(3점) : 삼각함수를 이용해 r_1 에 관한 (1) 또는 (4)의 식과 r_1 을 정확히 구할 수 있다.
- (2)와 같이 r_1 과 r_2 의 관계를 정의하고 이를 이용해 r_2 를 구하면 +4점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(3점) : r_1 과 r_2 의 관계를 이용하여, (2) 또는 (5) 또는 (6)과 같이 식만 구할 수 있다.
 - A(4점) : r_1 과 r_2 의 관계를 이용하여, (2) 또는 (5) 또는 (6)과 r_2 를 정확히 구할 수 있다.
- (3)과 같이 원의 방정식을 이용하여 S_2 와 C_2 를 정확히 구하면 +2점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(1점) : S_2 나 C_2 중 하나만 정확히 구할 수 있다.
 - A(2점) : S_2 와 C_2 둘 다 정확히 구할 수 있다.

[문제 1-2]

- (7)과 같이 원의 반지름의 길이 r_k 를 수열의 귀납적 정의로 정확히 구하면 +6점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - C(3점) : r_1, r_2 만을 구해 r_k 에 대한 일반항을 구할 수 있다.
 - B(5점) : (7)과 같이 r_k 와 r_{k+1} 의 관계를 구할 수 있다.
 - A(6점) : (7)과 같이 r_k 와 r_{k+1} 의 관계를 구하고 r_k 에 관한 일반항을 구할 수 있다.
- (8), (9), (10), (11)을 이용해 $\sum_{k=1}^{10} C_k$ 와 $\sum_{k=1}^{10} S_k$ 를 정확히 구하면 +6점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - D(1점) : (8), (9)와 같이 원 넓이 합과 원 둘레의 길이의 합 중 하나만 식으로 나타낼 수 있다.
 - C(2점) : (8), (9)와 같이 원 넓이 합과 원 둘레의 길이의 합을 모두 정확한 식으로 나타낼 수 있다.
 - B(4점) : (8), (9)와 같이 원 넓이 합과 원 둘레의 길이의 합을 모두 정확한 식으로 나타낼 수 있고,
(10)을 활용하여 $\sum_{k=1}^{10} C_k$ 와 $\sum_{k=1}^{10} S_k$ 중 하나만 정확히 구할 수 있다.
 - A(6점) : (8), (9), (10), (11)을 활용하여 $\sum_{k=1}^{10} C_k$ 와 $\sum_{k=1}^{10} S_k$ 를 정확히 구할 수 있다.

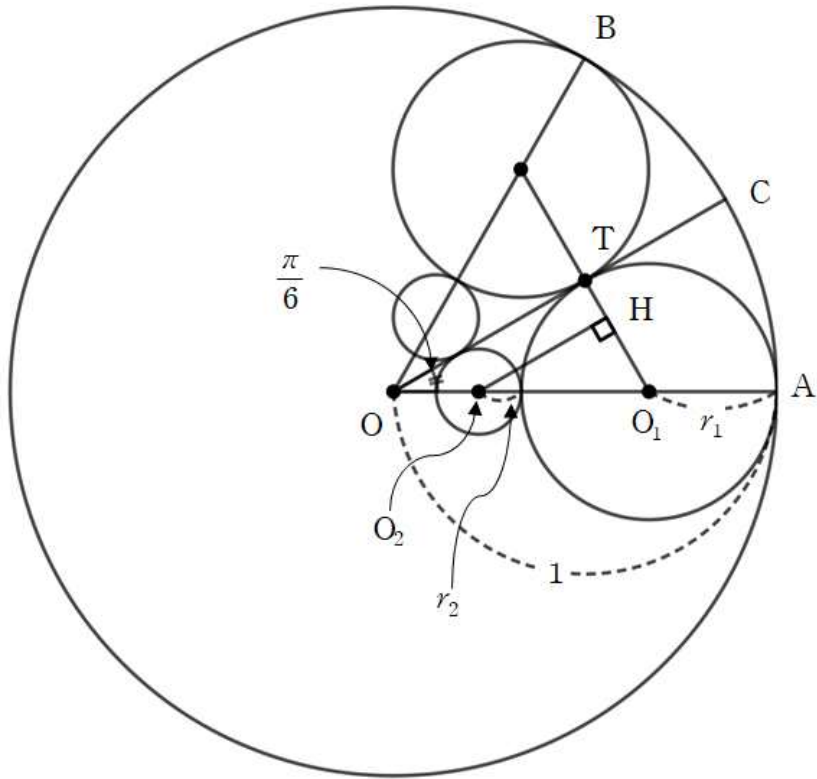
[문제 1-3]

- (12), (13)과 같이 a_N 을 이용해 영역을 균등하게 분할하는 사잇각에 대한 $\sin \frac{\pi}{a_N}$ 를 α (혹은 적당한 변수)로 표현하면 +5점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(3점) : (12)와 같이 $\angle AOB$ 와 $\angle AOC$ 를 $\frac{2\pi}{3N+3}$ 또는 $\frac{\pi}{a_N}$ 으로 정확히 표현할 수 있다.
 - A(5점) : (13)과 같이 사잇각 $\frac{\pi}{a_N}$ 에 대한 $\sin \frac{\pi}{a_N}$ 를 α (혹은 적당한 변수)로 정확히 표현할 수 있다.
- (14), (15), (16)과 같이 등비수열의 첫째항과 α 를 구하고, 귀납적 정의를 이용해 공비를 정확히 구하면 +8점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - C(3점) : (14)와 같이 첫째항인 반지름의 길이 r_1 과 정의한 α 를 이용해서 정확히 표현할 수 있다.
 - B(5점) : (15)와 같이 정의한 α 를 r_k 와 r_{k+1} 로 정확히 표현할 수 있다.
 - A(8점) : (15)와 같이 정의한 α 를 r_k, r_{k+1} 로 표현하며, (16)을 정확히 구할 수 있다.
- (17)과 같이 원의 반지름의 길이 r_k 에 대한 등비수열의 일반항을 정확히 구하면 +6점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(4점) : (17)과 같이 r_k 를 α 와 k 에 대한 등비수열의 일반항만을 구할 수 있다.
 - A(6점) : (17)과 같이 r_k 를 α 와 k 에 대한 등비수열의 일반항을 구하고, α 에 대한 정의를 명시할 수 있다.

7. 예시 답안

[문제 1-1]

문제의 조건에서 $n = 1, k = 2$ 이므로, 시행마다 6개의 원을 내접 또는 외접하며 그리는 문제이며 총 2회 시행을 반복한다. 즉, 첫 번째 시행이 완료되면, 반지름의 길이 r_1 인 6개의 원이 외접하면서 반지름의 길이가 1인 주어진 원에 서로 내접하는 형태가 되고, 두 번째 시행이 완료되면, 반지름의 길이 r_2 인 6개의 원이 첫 번째 시행 결과에 그려진 반지름의 길이가 r_1 인 원들과 외접하는 형태가 된다.



[그림 3]

[그림 3]과 같이 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 이므로, $\angle AOC = \frac{\pi}{6}$ 가 된다. 또한, $\triangle OO_1T$ 에 대해 다음과 같다.

$$(1 - r_1) \times \sin \frac{\pi}{6} = r_1, \quad 1 - r_1 = 2r_1, \quad r_1 = \frac{1}{3} \quad (1)$$

(1)에 의해 구해진 반지름의 길이는 $r_1 = \frac{1}{3}$ 이다. 또한, O_2 에서 선분 O_1T 로 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\triangle O_2O_1H$ 에 대해 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$(r_1 + r_2) \times \sin \frac{\pi}{6} = r_1 - r_2 \quad (2)$$

이를 정리하면, $r_2 = \frac{1}{9}$ 가 된다. 결론적으로, $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = \frac{1}{9}$ 을 활용해 원의 넓이의 총합인 S_2 와 원의 둘레의 길이의 총합인 C_2 를 다음과 같이 구한다.

$$S_2 = 6 \times \pi \times \frac{1}{81}, \quad C_2 = 6 \times 2 \times \pi \times \frac{1}{9} \quad (3)$$

이므로 $S_2 = \frac{2}{27}\pi$ 이고, $C_2 = \frac{4}{3}\pi$ 이다.

문제 [1-1]의 별해1

1회 시행 시, 그려진 원들의 반지름의 길이는 r_1 , 2회 시행 시 그려진 원들의 반지름의 길이는 r_2 라 할 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{r_1}{1-r_1} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad r_1 = \frac{1}{3} \quad (4)$$

r_2 를 구하기 위해, 도형의 답음을 이용하여 비례식을 세울 수 있다.

$$1 : \frac{1}{3} = \frac{1}{3} : r_2, \quad r_2 = \frac{1}{9} \quad (5)$$

또한, (4)에서 r_1 을 구한 삼각함수를 이용하여, r_2 에 관한 삼각함수를 세울 수 있다.

$$\frac{r_2}{\frac{1}{3}-r_2} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad r_2 = \frac{1}{9} \quad (6)$$

문제 [1-1]의 별해2

k 회 시행 시, (1)을 구한다. 그리고 r_k, r_{k+1} 에 대한 관계를 수열의 귀납적 정의를 이용해

(7)과 같이 세울 수 있다. (7)을 구하고, 일반항을 $r_k = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ 로 두면 $r_2 = \frac{1}{9}$

을 얻는다. 이후, (3)을 계산하면 $S_2 = \frac{2}{27}\pi$ 이고, $C_2 = \frac{4}{3}\pi$ 의 값을 얻는다.

[문제 1-2]

문제의 조건에서 $n=1, k=10$ 이므로, 시행마다 6개의 원을 내접 또는 외접하며 그리는 문제이며 총 10회 시행을 반복한다. 10회 시행이 반복된 이후, 시행마다 얻어진 원의 넓이의 총합과 원의 둘레의 길이의 총합을 등비수열의 합을 통해 구한다.

문제 [1-1]의 일반항과 같으므로, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(r_k + r_{k+1}) \times \sin \frac{\pi}{6} = r_k - r_{k+1}, \quad r_{k+1} = \frac{1}{3}r_k \quad (7)$$

또한, $r_k = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ 이므로 일반항 $r_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ 이다. 따라서, $\sum_{k=1}^{10} S_k$ 은 다음과 같은 방법으로 계산한다.

$$\sum_{k=1}^{10} S_k = a_1 \times \sum_{k=1}^{10} \pi r_k^2 = 6\pi \times \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{20} \right\} \quad (8)$$

이는 등비수열의 합과 같으므로 다음과 같이 풀이한다.

$$\sum_{k=1}^{10} S_k = 6\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left\{1 + \frac{1}{9} + \dots + \left(\frac{1}{9}\right)^9\right\} = \frac{2}{3}\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{9}} \quad (9)$$

이므로 정리하면, $\sum_{k=1}^{10} S_k$ 은 $\frac{3}{4}\pi \left\{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{10}\right\} = \frac{3}{4}\pi \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}$ 이다.

$\sum_{k=1}^{10} C_k$ 도 마찬가지로 다음과 같이 풀이한다.

$$\sum_{k=1}^{10} C_k = a_1 \times \sum_{k=1}^{10} 2\pi r_k = 4\pi \times \left\{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^9\right\} \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^{10} C_k = 4\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}} \quad (11)$$

이므로 정리하면, $\sum_{k=1}^{10} C_k$ 는 $6\pi \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$ 이다.

[문제 1-3]

일반항 $a_n = 3n + 3$ 에 대해 영역을 균등하게 나누는 사잇각이 변화한다. a_n 과 사잇각 사이의 규칙성을 논증하고 이를 서술한다. 예를 들어, $n = 6$ 이면, 사잇각이 60° 가 되고, $n = 9$ 이면, 사잇각이 40° 가 된다.

즉, 일반항의 값의 변화에 따라 $\angle AOB$ 와 $\angle AOC$ 를 다음과 같이 나타낸다.

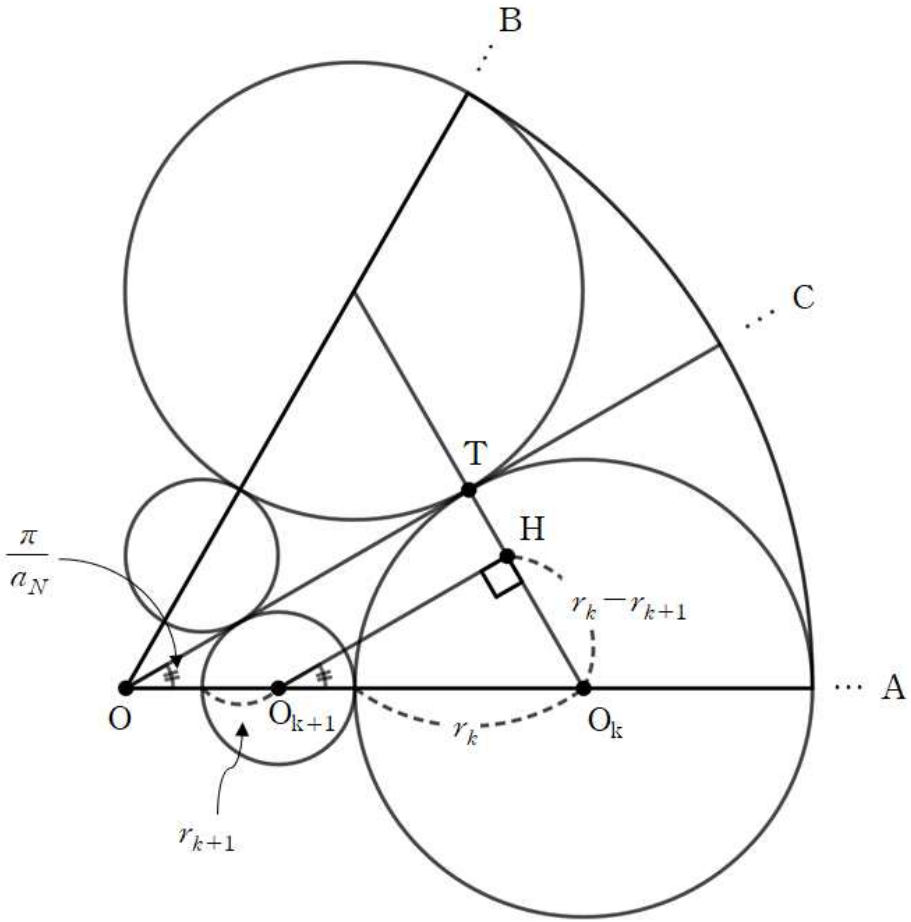
$$\angle AOB = \frac{2\pi}{3N+3} = \frac{2\pi}{a_N}, \quad \angle AOC = \frac{\pi}{3N+3} = \frac{\pi}{a_N} \quad (12)$$

다음과 같이 α 를 정의할 수 있다.

$$\alpha = \sin \frac{\pi}{3N+3} = \sin \frac{\pi}{a_N} \quad (13)$$

$\triangle OO_1T$ 에서 삼각함수를 이용하면, 등비수열의 첫째항 r_1 을 다음과 같이 얻는다.

$$(1 - r_1) \times \alpha = r_1, \quad r_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (14)$$



[그림 4]

마찬가지 방법으로, 주어진 반지름 r_k 에 대해 등비수열의 일반항을 정리하면 다음과 같다.

$$\alpha = \sin \frac{\pi}{a_N} = \frac{r_k - r_{k+1}}{r_k + r_{k+1}} \quad (15)$$

이를 r_k 에 대해 정리하면 r_{k+1} 과 r_k 에 대한 관계식을 다음과 같이 얻는다.

$$r_{k+1} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \times r_k \quad (16)$$

그러므로, 최종적으로 구해진 원의 반지름의 길이 r_k 는 다음과 같다.

$$r_k = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right) \times \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)^{k-1}, \quad \text{단 } \alpha = \sin \frac{\pi}{a_N} \quad (17)$$

2026학년도 수시모집 논술전형 논술고사 문항해설 및 채점기준 [자연계열 I (과학기술대학)]

[덕성여자대학교 문항정보 2]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I (과학기술대학) / 문제번호 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II
	핵심개념 및 용어	항등식, 이차방정식, 이차함수, 방정식과 부등식에의 활용, 다항함수의 정적분, 곡선과 직선 사이의 넓이, 함수의 극한
예상 소요 시간	총 90분 중 45분 소요 예상	

2. 문항 및 제시문

[문제2] [60점]

양수 a ($0 < a < 1$)에 대하여 실수 전체에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & (x < 0) \\ -ax^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

가 있다. 0이 아닌 실수 t 에 대하여 곡선 $y = -(x-t)^2 + f(t)$ 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 라 하면 곡선 $y = -(x-t)^2 + f(t)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = x_1, x = x_2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 $S(t)$ 이다.

[문제 2-1]

$a = \frac{1}{2}$ 일 때, $S(-2)$ 와 $S(2)$ 의 값을 각각 구하시오.

[14점]

[문제 2-2]

$t < 0$ 이면 $\frac{S(t)}{t^3} = -g(a)$ 이다.

$g(a) = \frac{6a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s}{3(1+a)^3}$ 일 때, 네 정수 p, q, r, s 의 값을 각각 구하시오.

[21점]

[문제 2-3]

$\frac{S(t)}{t^3} = \begin{cases} -g(a) & (t < 0) \\ h(a) & (t > 0) \end{cases}$ 일 때,

$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{g(a)}{h(a)}$ 와 $\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{g(a)}{(1-a)^3 h(a)}$ 의 값을 각각 구하시오.

[25점]

3. 출제 의도

[문제 2-1]

- 이차방정식을 이용하여 주어진 두 이차함수의 그래프의 교점을 구할 수 있는지 알아본다.
- 주어진 조건을 만족시키는 도형의 넓이를 해석하고 이해할 수 있는지 알아본다.
- 다항함수의 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제 2-2]

- 일반적인 조건에서 두 이차함수의 그래프의 교점을 구할 수 있는지 알아본다.
- 다항함수의 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 계산할 수 있는지 알아본다.
- 주어진 식을 한 문자로 정리하여 표현하고, 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 2-3]

- 함수의 극한의 성질을 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
2	2-1	[수학Ⅱ]-(2)미분-③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. [수학Ⅱ]-(3)적분-③ 정적분의 활용 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	2-2	[수학]-(1)문자와 식-② 나머지정리 [10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. [수학Ⅱ]-(2)미분-③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. [수학Ⅱ]-(3)적분-③ 정적분의 활용 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	2-3	[수학Ⅱ]-(1)함수의 극한과 연속-Ⅰ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [수학Ⅱ]-(3)적분-③ 정적분의 활용 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학	김원경 외 14인	비상교육	2020	24~26		
	수학	황선옥 외 8인	미래엔	2020	26~27		
	수학Ⅱ	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2021	10~24, 93~96, 132~139		
	수학Ⅱ	류희찬 외 10인	천재교과 서	2020	12~28, 92~96, 131~138		

5. 문항 해설

[문제 2-1]

- 이차방정식을 이용하여 주어진 두 이차함수의 그래프의 교점을 구한다.

- 다항함수의 정적분을 이용하여 $S(-2)$ 와 $S(2)$ 의 값을 구한다.

[문제 2-2]

- 이차방정식을 이용하여 주어진 두 이차함수의 그래프의 교점을 구한다.
- 다항함수의 정적분을 이용하여 $t < 0$ 일 때 $S(t)$ 의 식을 계산한다.
- $S(t)$ 를 정리하여 $g(a)$ 를 구하고, 항등식의 성질을 이용하여 미정계수의 값을 구한다.

[문제 2-3]

- 다항함수의 정적분을 이용하여 $t > 0$ 일 때 $S(t)$ 의 식을 계산하고 $h(a)$ 를 구한다.
- $h(a)$ 와 [문제 2-2]에서 구한 $g(a)$ 를 통해 주어진 극한값을 구한다.

6. 채점 기준

[문제 2-1]

- $t = -2$ 일 때, $y = f(x)$ 의 그래프와 곡선 $y = -(x+2)^2 + 2$ 의 두 교점의 x 좌표 (1)을 구하면 +3점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(1점) : 두 교점을 구하기 위한 방정식 $\frac{1}{2}x^2 = -(x+2)^2 + 2$ 을 작성한다.
 - A(3점) : 방정식으로부터 두 교점의 x 좌표 $-2, -\frac{2}{3}$ 를 구할 수 있다.

- $t = -2$ 일 때, 두 직선 $x = x_1, x = x_2$ 와 x 축 및 곡선 $y = -(x+2)^2 + 2$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 (4)를 구할 수 있으면 +4점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(1점) : 영역의 넓이를 계산하기 위해 적분식 (3)을 표현할 수 있다.
 - A(4점) : 적분값을 구하여 넓이 (4)를 구할 수 있다.

- $t = 2$ 일 때, $y = f(x)$ 의 그래프와 곡선 $y = -(x-2)^2 - 2$ 이 만나는 두 교점의 x 좌표 (2)를 구하면 +3점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(1점) : 두 교점을 구하기 위한 방정식 $-\frac{1}{2}x^2 = -(x-t)^2 - 2$ 을 작성한다.
 - A(3점) : 방정식으로부터 두 교점의 x 좌표 $2, 6$ 을 구할 수 있다.

- $t = 2$ 일 때, 두 직선 $x = x_1, x = x_2$ 와 x 축, 곡선 $y = -(x-2)^2 - 2$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 (6)을 구할 수 있으면 +4점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(1점) : 영역의 넓이를 계산하기 위해 적분식 (5)를 표현할 수 있다.
 - A(4점) : 적분값을 계산하여 넓이 (6)을 구할 수 있다.

[문제 2-2]

- $t < 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와 곡선 $y = -(x-t)^2 + at^2$ 이 만나는 두 교점의 x 좌표 (7)을 구하면 +5점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(1점) : 두 교점을 구하기 위한 방정식 $ax^2 = -(x-t)^2 + at^2$ 을 작성할 수 있다.
 - A(5점) : 방정식으로부터 두 교점의 x 좌표 (7)을 구할 수 있다.

- 곡선 $y = -(x-t)^2 + at^2$ 과 x 축 및 두 직선 $x = x_1, x = x_2$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 $S(t)$ 를 구할 수 있으면 +8점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(4점) : 두 교점의 x 좌표에 관한 부등식 (8)을 고려하여 적분식 (9)를 표현할 수 있다.
 - A(8점) : 적분값을 구하여 넓이를 식 (11)로 표현할 수 있다.
- $S(t)$ 를 이용해서 $g(a)$ 를 계산하여 p, q, r, s 의 값을 구할 수 있으면 +8점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - D(2점) : p, q, r, s 중 1개를 구할 수 있다.
 - C(4점) : p, q, r, s 중 2개를 구할 수 있다.
 - B(6점) : p, q, r, s 중 3개를 구할 수 있다.
 - A(8점) : p, q, r, s 중 4개를 구할 수 있다.

[문제 2-3]

- $t < 0$ 일 때 $g(a)$ 와 $t > 0$ 일 때 $h(a)$ 를 구할 수 있으면 +8점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(4점) : $g(a)$ 와 $h(a)$ 중 하나만 구할 수 있다.
 - A(8점) : $g(a)$ 와 $h(a)$ 를 모두 구할 수 있다.

- $g(a)$ 와 $h(a)$ 를 이용해서 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{g(a)}{h(a)}$ 을 구할 수 있으면 +8점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - A(8점) : 극한값 (21)을 계산할 수 있다.

- $g(a)$ 와 $h(a)$ 를 이용해서 $\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{g(a)}{(1-a)^3 h(a)}$ 을 구할 수 있으면 +9점
 - E(0점) : 문제의 의미를 알지 못한다.
 - A(9점) : 극한값 (22)를 계산할 수 있다.

7. 예시 답안

[문제 2-1]

$$a = \frac{1}{2} \text{ 이면 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (x < 0) \\ -\frac{1}{2}x^2 & (x \geq 0) \end{cases} \text{ 이다.}$$

곡선 $y = -(x-t)^2 + f(t)$ 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는

$t < 0$ 일 때, 이차방정식 $-(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}x^2$ 의 두 실근이므로

이차방정식을 정리하여 풀면 $\frac{3}{2}x^2 - 2tx + \frac{1}{2}t^2 = 0$ 에서 $x = t$ 또는 $x = \frac{t}{3}$ 이고 $t = -2$ 이면

$$x = -2 \text{ 또는 } x = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

이다.

곡선 $y = -(x-t)^2 + f(t)$ 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는

$t > 0$ 일 때, 이차방정식 $-(x-t)^2 - \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{2}x^2$ 의 두 실근이므로

이차방정식을 정리하여 풀면 $\frac{1}{2}x^2 - 2tx + \frac{3}{2}t^2 = 0$ 에서 $x = t$ 또는 $x = 3t$ 이고 $t = 2$ 이면

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 6 \quad (2)$$

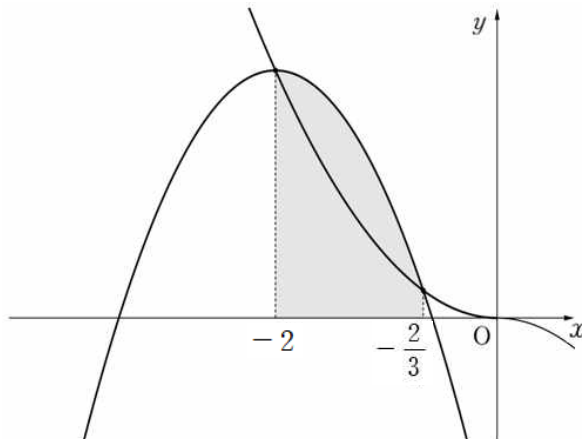
이다.

따라서

$$S(-2) = \int_{-2}^{-\frac{2}{3}} |-(x+2)^2 + 2| dx \quad (3)$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x \right]_{-2}^{-\frac{2}{3}} = \frac{152}{81} \quad (4)$$

이고,

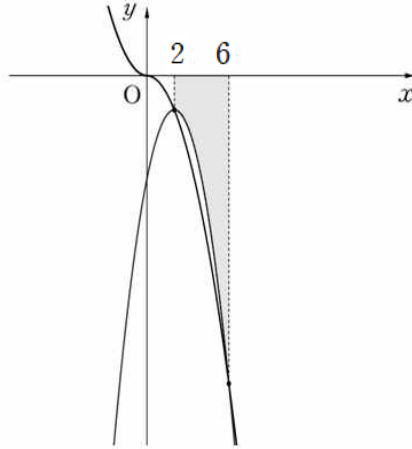


[그림 5]

$$S(2) = \int_2^6 |-(x-2)^2 - 2| dx \quad (5)$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x \right]_2^6 = \frac{88}{3} \quad (6)$$

이다.



[그림 6]

[문제 2-1의 별해]

$$a = \frac{1}{2} \text{ 이면 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (x < 0) \\ -\frac{1}{2}x^2 & (x \geq 0) \end{cases} \text{ 이다.}$$

$t = -2$ 일 때,

곡선 $y = -(x+2)^2 + 2$ 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는

이차방정식 $-(x+2)^2 + 2 = \frac{1}{2}x^2$ 의 두 실근이므로

이차방정식을 정리하여 풀면 $\frac{3}{2}x^2 + 4x + 2 = 0$ 에서

$$x = -2 \text{ 또는 } x = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

이고

$t = 2$ 일 때, 이차방정식 $-(x-2)^2 - 2 = -\frac{1}{2}x^2$ 의 두 실근이므로

이차방정식을 정리하여 풀면 $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = 0$ 에서

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 6 \quad (2)$$

이다.
따라서

$$S(-2) = \int_{-2}^{-\frac{2}{3}} |-(x+2)^2 + 2| dx \quad (3)$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x \right]_{-2}^{-\frac{2}{3}} = \frac{152}{81} \quad (4)$$

이고,

$$S(2) = \int_2^6 |-(x-2)^2 - 2| dx \quad (5)$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x \right]_2^6 = \frac{88}{3} \quad (6)$$

이다.

[문제 2-2]

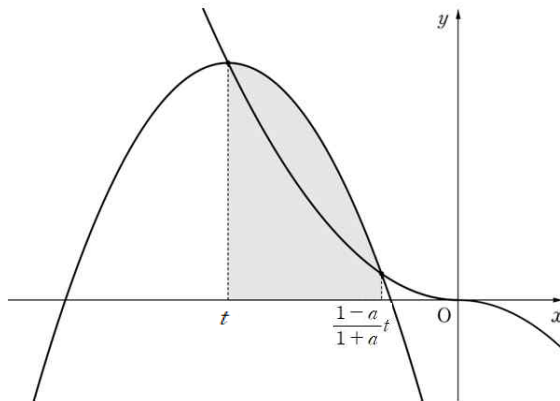
$t < 0$ 이면 곡선 $y = -(x-t)^2 + f(t)$ 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는 이차방정식 $-(x-t)^2 + at^2 = ax^2$ 의 두 실근이므로 이차방정식을 정리하여 풀면 $(a+1)x^2 - 2tx + t^2 - at^2 = 0$ 에서

$$x = t \quad \text{또는} \quad x = \frac{1-a}{1+a}t \quad (7)$$

이때 $t < 0, 0 < a < 1$ 이므로

$$t < \frac{1-a}{1+a}t \quad (8)$$

이다.



[그림 7]

따라서

$$\begin{aligned}
S(t) &= \int_t^{\frac{1-a}{1+a}t} |-(x-t)^2 + at^2| dx \\
&= \int_t^{\frac{1-a}{1+a}t} \{-(x-t)^2 + at^2\} dx
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + tx^2 + (at^2 - t^2)x \right]_t^{\frac{1-a}{1+a}t} \\
&= -\frac{1}{3} \left\{ \frac{(1-a)^3}{(1+a)^3} t^3 - t^3 \right\} + t \left\{ \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2} t^2 - t^2 \right\} + (a-1)t^2 \left(\frac{1-a}{1+a} t - t \right) \\
&= t^3 \times \left\{ -\frac{1}{3} \times \frac{-2a^3 - 6a}{(1+a)^3} + \frac{-4a}{(1+a)^2} + \frac{-2a^2 + 2a}{1+a} \right\} \\
&= -\frac{t^3}{3} \times \left\{ \frac{-2a^3 - 6a}{(1+a)^3} + (-3) \times \frac{-4a(1+a)}{(1+a)^3} + (-3) \times \frac{(-2a^2 + 2a)(1+a)^2}{(1+a)^3} \right\}
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{t^3}{3} \times \left\{ \frac{-2a^3 - 6a}{(1+a)^3} + \frac{12a^2 + 12a}{(1+a)^3} + \frac{6a^4 + 6a^3 - 6a^2 - 6a}{(1+a)^3} \right\} \\
&= -\frac{t^3}{3} \times \frac{6a^4 + 4a^3 + 6a^2}{(1+a)^3}
\end{aligned} \tag{11}$$

이고

$$\frac{S(t)}{t^3} = -g(a) = -\frac{6a^4 + 4a^3 + 6a^2}{3(1+a)^3} \quad (t < 0) \tag{12}$$

이므로

$$g(a) = \frac{6a^4 + 4a^3 + 6a^2}{3(1+a)^3} \tag{13}$$

에서

$$p = 4, \quad q = 6, \quad r = 0, \quad s = 0 \tag{14}$$

이다.

[문제 2-3]

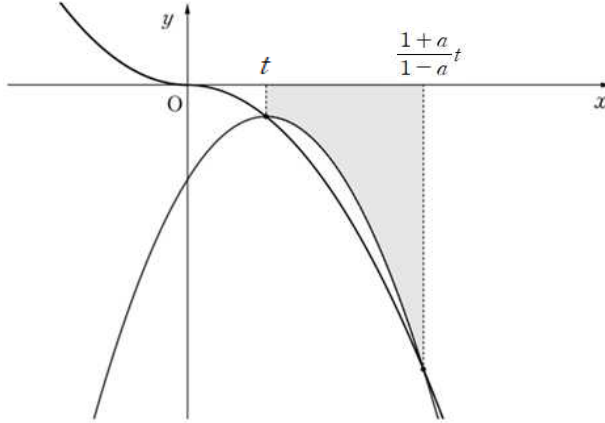
$t > 0$ 이면 곡선 $y = -(x-t)^2 + f(t)$ 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표는 이차방정식 $-(x-t)^2 - at^2 = -ax^2$ 의 두 실근이므로 이차방정식을 정리하여 풀면 $(a-1)x^2 + 2tx - t^2 - at^2 = 0$ 에서

$$x = t \quad \text{또는} \quad x = \frac{1+a}{1-a}t \tag{15}$$

이때 $t > 0, 0 < a < 1$ 이므로

$$t < \frac{1+a}{1-a}t \quad (16)$$

이다.



[그림 8]

따라서

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^{\frac{1+a}{1-a}t} |-(x-t)^2 - at^2| dx \\ &= \int_t^{\frac{1+a}{1-a}t} \{(x-t)^2 + at^2\} dx \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + (at^2 + t^2)x \right]_t^{\frac{1+a}{1-a}t} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{(1+a)^3}{(1-a)^3} t^3 - t^3 \right\} - t \left\{ \frac{(1+a)^2}{(1-a)^2} t^2 - t^2 \right\} + (a+1)t^2 \left(\frac{1+a}{1-a}t - t \right) \\ &= t^3 \times \left\{ \frac{1}{3} \times \frac{2a^3 + 6a}{(1-a)^3} - \frac{4a}{(1-a)^2} + \frac{2a^2 + 2a}{1-a} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{t^3}{3} \times \left\{ \frac{2a^3 + 6a}{(1-a)^3} - 3 \times \frac{4a(1-a)}{(1-a)^3} + 3 \times \frac{(2a^2 + 2a)(1-a)^2}{(1-a)^3} \right\} \\ &= \frac{t^3}{3} \times \left\{ \frac{2a^3 + 6a}{(1-a)^3} + \frac{12a^2 - 12a}{(1-a)^3} + \frac{6a^4 - 6a^3 - 6a^2 + 6a}{(1-a)^3} \right\} \\ &= \frac{t^3}{3} \times \frac{6a^4 - 4a^3 + 6a^2}{(1-a)^3} \end{aligned} \quad (19)$$

이고

$$\frac{S(t)}{t^3} = h(a) = \frac{6a^4 - 4a^3 + 6a^2}{3(1-a)^3} \quad (t > 0) \quad (20)$$

이다.

[문제 2-2] 에서 $g(a) = \frac{6a^4 + 4a^3 + 6a^2}{3(1+a)^3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{g(a)}{h(a)} &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{(6a^4 + 4a^3 + 6a^2)(1-a)^3}{(6a^4 - 4a^3 + 6a^2)(1+a)^3} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{(6a^2 + 4a + 6)(1-a)^3}{(6a^2 - 4a + 6)(1+a)^3} \\ &= \frac{6 \times 1}{6 \times 1} = 1\end{aligned}\tag{21}$$

이고

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{g(a)}{(1-a)^3 h(a)} = \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{(6a^4 + 4a^3 + 6a^2)}{(6a^4 - 4a^3 + 6a^2)(1+a)^3} = \frac{16}{8 \times 8} = \frac{1}{4}\tag{22}$$

이다.