2026학년도 동국대학교 수시모집

논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2026학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하
	핵심개념 및 용어	이면각, 수선의 발
예상 소요 시간	25분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 이면각이라 한다. 이때 직선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α, β를 각각 이면각의 면이라고 한다. 이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 직선 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 두 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, $\angle$AOB의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하고 이 각의 크기를 이면각의 크기라고 한다.

- 『고등학교 기하』

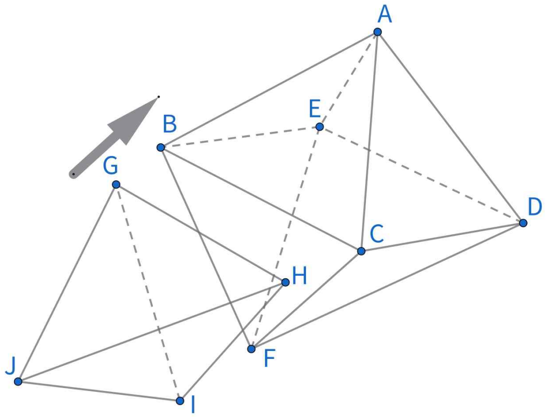
【나】 공간에서 직선 l과 평면 α 위의 모든 직선이 수직일 때, 직선 l과 평면 α는 서로 수직이라고 하고, 기호로 $l \perp \alpha$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 α의 수선이라 하고, 직선 l과 평면 α가 만나는 점 O를 수선의 발이라고 한다.

- 『고등학교 기하』

【다】 평면 α와 한 점 O에서 만나는 직선 l이 있다. 이때 직선 l이 평면 α 위의 점 O를 지나는 서로 다른 두 직선 m, n과 서로 수직이면 직선 l이 평면 α에 수직이다.

- 『고등학교 기하』

[문제1] 모든 변의 길이가 1인 다음 그림의 정팔면체와 정사면체에 대해서 다음 물음에 답하시오.



(1) 정팔면체에서 평면 ABC와 평면 FBC가 이루는 이면각 중 둔각의 크기를 α라고 할 때 $\cos\alpha$의 값을 구하시오.

(2) 정팔면체에서 평면 ABC와 평면 AED가 이루는 이면각 중 예각의 크기를 β라고 할 때 $\cos\beta$의 값을 구하시오.

(3) 정사면체에서 평면 JGH와 평면 IGH가 이루는 이면각 중 예각의 크기를 γ라고 할 때 $\cos\gamma$의 값을 구하시오.

(4) 점 G와 점 B, 점 H와 점 C, 점 I와 점 F를 일치시켰을 때, 평면 ABC와 평면 JGH가 일치함을 이면각을 이용하여 보이시오.

3. 출제의도

삼수선의 정리를 이해하고, 이를 바탕으로 정사면체와 정팔면체의 면을 포함하는 평면 사이의 이면각의 크기의 코사인을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	※ 수학 : 수학과 교육과정 – 【선택 중심 교육과정】 – 진로 선택 – <기하> – (3) 공간도형과 공간좌표 – ① 공간도형
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2019	115, 118
	고등학교 기하	이준열 외 7인	천재교육	2020	119, 122
	고등학교 기하	권오남 외 14인	교학사	2020	121, 122, 125
기타	2015개정 교육과정 교수 학습 자료		교육부, 17개시 도 교육청	2018	304-306

5. 문항해설

(1), (2) 정팔면체의 두 면 사이의 이면각의 크기를 구할 수 있다.
(3) 정사면체의 두 면 사이의 이면각의 크기를 구할 수 있다.
(4) 정팔면체의 한 면과 정사면체의 한 면을 일치시켰을 때 그 면의 옆면들이 한 평면이 됨을 이면각을 이용하여 보일 수 있다.

6. 평가기준

[1단계] : (1)의 답을 구한다. : $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$

선분 BC의 중점을 M이라고 하면 선분 MA과 선분 BC가 수직이고, 선분 MF도 선분 BC에 수직이다. 따라서 평면 ABC와 평면 FBC가 이루는 이면각 중 하나는 $\angle\mathrm{AMF}$와 같다. 한편, 점 A의 평면 BCDE에 내린 수선의 발 N은 정사각형 BCDE의 대각선의 교점이다. 삼각형 ANM은 직각삼각형이고 선분의 AM의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 선분 MN의 길이는 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 $\cos(\angle\mathrm{AMN}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\cos(\angle\mathrm{AMF}) = \cos(2\angle\mathrm{AMN}) = 2\cos^2(\angle\mathrm{AMN}) - 1 = -\frac{1}{3}$$

이고, $\angle\mathrm{AMF}$는 둔각이므로 $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$이다.

(다른 풀이) 삼각형 ABC의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이고, 삼각형 NBC의 면적은 $\frac{1}{4}$이다. 삼각형 ABC를 평면 BCDE에 내린 정사영은 삼각형 NBC이므로, 평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 $\angle\mathrm{AMN}$의 코사인은 두 삼각형의 면적의 비인 $\cos(\angle\mathrm{AMN}) = \frac{(\triangle\mathrm{NBC}\text{의 넓이})}{(\triangle\mathrm{ABC}\text{의 넓이})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$와 같다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\cos(\angle\mathrm{AMF}) = \cos(2\angle\mathrm{AMN}) = 2\cos^2(\angle\mathrm{AMN}) - 1 = -\frac{1}{3}$$

이고, $\angle\mathrm{AMF}$는 둔각이므로 $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$이다.

[2단계] : (2)의 답을 구한다. : $\cos\beta = \frac{1}{3}$

선분 ED의 중점을 Q라고 하자. 사각형 MAQF는 네 변의 길이가 같은 사각형으로 선분 MA와 선분 FQ, 선분 QA와 선분 FM은 각각 평행이다. 선분 BC와 선분 ED도 평행인 선분이다. 점 A를 지나고 이 선분들과 평행인 직선을 l이라 하면 직선 l은 평면 ABC와 평면 AED의 교선이다. 교선 l과 선분 AM이 이루는 각은 선분 ED와 선분 QF가 이루는 각과 같으므로 수직이다. 마찬가지로 교선 l과 선분 AQ가 이루는 각도 수직이다. 따라서 두 평면의 이면각 중 하

나는 $\angle \mathrm{MAQ}$이다. $|\mathrm{MA}| = |\mathrm{AQ}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\mathrm{MQ}| = 1$이므로, 삼각형 MAQ에서 코사인법칙을 이용하면 $\cos(\angle \mathrm{MAQ}) = \dfrac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$이다. $\angle \mathrm{MAQ}$는 예각이므로 $\cos\beta = \frac{1}{3}$이다.

[3단계] : (3)의 답을 구한다. : $\cos\gamma = \frac{1}{3}$

선분 GH의 중점을 O, 삼각형 IGH의 무게중심을 P라고 하자. 선분 OJ, 선분 OI는 각각 선분 GH에 수직이므로 평면 JGH와 평면 IGH의 이면각 중 하나는 ∠ JOI, 즉 ∠ JOP이다. 점 J의 삼각형 IGH에 내린 수선의 발이 점 P이므로

$$\cos(\angle \mathrm{JOP}) = \frac{|\mathrm{PO}|}{|\mathrm{JO}|} = \frac{\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

이다. 여기서, 무게중심의 성질에 의해 $|\mathrm{PO}| = \frac{1}{3}|\mathrm{IO}|$임을 사용하였다. ∠ JOP는 예각이므로 $\cos\gamma = \frac{1}{3}$이다.

(다른 풀이) 삼각형 JGH의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이고, 삼각형 PGH의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{12}$이다. 삼각형 JGH를 평면 IGH에 내린 정사영은 삼각형 PGH이므로, $\cos(\angle \mathrm{JOP}) = \dfrac{(\triangle \mathrm{PGH}\text{의 넓이})}{(\triangle \mathrm{JGH}\text{의 넓이})} = \frac{1}{3}$이다. ∠ JOP는 예각이므로 $\cos\gamma = \frac{1}{3}$이다.

[4단계] : (4)를 보인다. : $\alpha+\gamma=\pi$**를 이용할 수 있다.**

점 G와 점 B, 점 H와 점 C, 점 I와 점 F를 일치시키면, 선분 GH의 중점 O와 선분 BC의 중점 M도 일치한다. 평면 JGH와 평면 ABC의 이면각의 크기는 평면 JGH와 평면 IGH의 이면각 중 예각의 크기 γ와 평면 FBC와 평면 ABC의 이면각 중 둔각의 크기 α의 합 $\alpha+\gamma$와 같다. $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha = \frac{1}{3} = \cos\gamma$이고 $0 < \pi-\alpha,\ \gamma < \frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha+\gamma=\pi$이다. 따라서 평면 ABC와 평면 JGH는 일치한다.

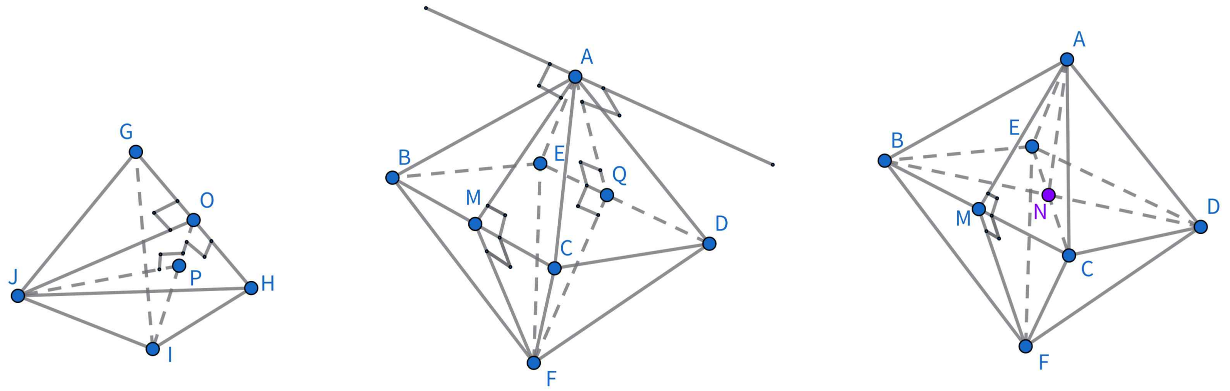
(다른 풀이) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\gamma = \frac{1}{3}$과 $0<\gamma<\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$로부터, 다음과 같이 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\sin(\alpha+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0$$

이고 $\frac{\pi}{2} < \alpha+\gamma < \frac{3\pi}{2}$이므로 $\alpha+\gamma=\pi$를 얻을 수 있다. 따라서 평면 ABC와 평면 JGH는 일치한다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계의 풀이 과정이 매끄러운 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계를 작성하였으나 풀이 과정이 매끄럽지 않은 경우	A
중	[1단계]부터 [3단계]까지 모두 풀이 과정이 매끄러운 경우	B
	[1단계]부터 [3단계] 중에서 어느 두 단계만 풀이 과정이 매끄러운 경우	C
	[1단계]부터 [3단계] 중에서 어느 한 단계만 풀이 과정이 매끄러운 경우	D
하	[1단계]부터 [3단계] 중에서 어느 한 단계라도 부분적으로 풀이 과정을 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 풀이 과정이 매끄럽게 작성하지 못하거나 전혀 작성하지 않은 경우	F

7. 예시답안



(1) 선분 BC의 중점을 M이라고 하면 선분 MA과 선분 BC가 수직이고, 선분 MF도 선분 BC에 수직이다. 따라서 평면 ABC와 평면 FBC가 이루는 이면각 중 하나는 $\angle\mathrm{AMF}$와 같다. 한편, 점 A의 평면 BCDE에 내린 수선의 발 N은 정사각형 BCDE의 대각선의 교점이다. 삼각형 ANM은 직각삼각형이고 선분의 MA의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 선분 MN의 길이는 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 $\cos(\angle\mathrm{AMN}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\cos(\angle\mathrm{AMF}) = \cos(2\angle\mathrm{AMN}) = 2\cos^2(\angle\mathrm{AMN}) - 1 = -\frac{1}{3}$$

이고, $\angle\mathrm{AMF}$는 둔각이므로 $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$이다.

(다른 풀이) 삼각형 ABC의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이고, 삼각형 NBC의 면적은 $\frac{1}{4}$이다. 삼각형 ABC를 평면 BCDE에 내린 정사영은 삼각형 NBC이므로, 평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 $\angle\mathrm{AMN}$의 코사인은 두 삼각형의 면적의 비인 $\cos(\angle\mathrm{AMN}) = \frac{(\triangle\mathrm{NBC}\text{의 넓이})}{(\triangle\mathrm{ABC}\text{의 넓이})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$와 같다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\cos(\angle\mathrm{AMF}) = \cos(2\angle\mathrm{AMN}) = 2\cos^2(\angle\mathrm{AMN}) - 1 = -\frac{1}{3}$$

이고, $\angle\mathrm{AMF}$는 둔각이므로 $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$이다.

(2) 선분 ED의 중점을 Q라고 하자. 사각형 MAQF는 네 변의 길이가 같은 사각형으로 선분 MA와 선분 QF, 선분 QA와 선분 FM은 각각 평행이다. 선분 BC와 선분 ED도 평행인 선분이다. 점 A를 지나고 이 선분들과 평행인 직선을 l이라 하면 직선 l은 평면 ABC와 평면 AED의 교선이다. 교선 l과 선분 AM이 이루는 각은 선분 ED와 선분 QF가 이루는 각과 같으므로 수직이다. 마찬가지로 교선 l과 선분 AQ가 이루는 각도 수직이다. 따라서 두 평면의 이면각 중 하나는 $\angle\mathrm{MAQ}$이다. $|\mathrm{MA}| = |\mathrm{AQ}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\mathrm{MQ}| = 1$이므로, 삼각형 MAQ에서 코사인법칙을 이용하면 $\cos(\angle\mathrm{MAQ}) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$이다. $\angle\mathrm{MAQ}$는 예각이므로 $\cos\beta = \frac{1}{3}$이다.

(3) 선분 GH의 중점을 O, 삼각형 IGH의 무게중심을 P라고 하자. 선분 OJ, 선분 OI는 각각 선분 GH에 수직이므로

평면 JGH와 평면 IGH의 이면각 중 하나는 ∠JOI, 즉 ∠JOP이다. 점 J의 삼각형 IGH에 내린 수선의 발이 점 P이므로

$$\cos(\angle \mathrm{JOP}) = \frac{|\mathrm{PO}|}{|\mathrm{JO}|} = \frac{\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

이다. 여기서, 무게중심의 성질에 의해 $|\mathrm{PO}| = \frac{1}{3}|\mathrm{IO}|$임을 사용하였다. ∠JOP는 예각이므로 $\cos\gamma = \frac{1}{3}$이다.

(다른 풀이) 삼각형 JGH의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이고, 삼각형 PGH의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{12}$이다. 삼각형 JGH를 평면 IGH에 내린 정사영은 삼각형 PGH이므로, $\cos(\angle \mathrm{JOP}) = \frac{(\triangle \mathrm{PGH}\text{의 넓이})}{(\triangle \mathrm{JGH}\text{의 넓이})} = \frac{1}{3}$이다. ∠JOP는 예각이므로 $\cos\gamma = \frac{1}{3}$이다.

(4) 점 G와 점 B, 점 H와 점 C, 점 I와 점 F를 일치시키면, 선분 GH의 중점 O와 선분 BC의 중점 M도 일치한다. 평면 JGH와 평면 ABC의 이면각의 크기는 평면 JGH와 평면 IGH의 이면각 중 예각의 크기 γ와 평면 FBC와 평면 ABC의 이면각 중 둔각의 크기 α의 합 $\alpha+\gamma$와 같다. $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha = \frac{1}{3} = \cos\gamma$이고 $0 < \pi-\alpha,\ \gamma < \frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha+\gamma=\pi$이다. 따라서 평면 ABC와 평면 JGH는 일치한다.

(다른 풀이) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\gamma = \frac{1}{3}$과 $0 < \gamma < \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$로부터, 다음과 같이 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\sin(\alpha+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0$$

이고 $\frac{\pi}{2} < \alpha+\gamma < \frac{3\pi}{2}$이므로 $\alpha+\gamma=\pi$를 얻을 수 있다. 따라서 평면 ABC와 평면 JGH는 일치한다.

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2026학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학I, 미적분
	핵심개념 및 용어	수열의 극한, 등차수열의 일반항과 합
예상 소요 시간	25분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$a_n = a + (n-1)d,$$

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \cdots)$$

- 『고등학교 수학I』

【나】 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k$ ② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k - \sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k = c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수) ④ $\sum_{k=1}^{n}c = cn$ (단, c는 상수)

- 『고등학교 수학I』

【다】 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}a_n = L$, $\lim_{n\to\infty}b_n = M$ (L, M은 실수)일 때

① $\lim_{n\to\infty}ca_n = cL$ (단, c는 상수) ② $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = L+M$

③ $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = L-M$ ④ $\lim_{n\to\infty}a_nb_n = LM$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$ (단, $b_n \neq 0$, $M \neq 0$)

- 『고등학교 미적분』

[문제2] 공차가 자연수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 <조건>을 만족한다.

< 조 건 >

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n}=2,\quad \sum_{n=1}^{10}(a_n-b_n)=180$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$**는** $n=7$**일 때만 최솟값을 갖는다.**

③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}|b_n|=88$

(1) 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 일반항을 각각 구하시오.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 $c_n=|a_n|-|b_n|$일 때, c_n의 최솟값을 구하시오.

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$을 구하시오.

3. 출제의도

등차수열의 개념과 미적분의 극한의 개념을 통합하여 종합적인 대수적 문제 해결 능력과 조건 해석 능력을 평가한다. 극한 개념과 수열의 합의 공식을 이용하여 첫째항과 공차에 대한 관계를 찾고 논리적 대수 능력과 자연수 조건을 활용한 공차를 특정할 수 있는지 확인하고 수열의 일반항과 합을 이용한 극한을 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 Ⅰ (3) 수열 ① 등차수열과 등비수열 수학 Ⅰ (3) 수열 ② 수열의 합 수학 미적분 (1) 수열의 극한 ① 수열의 극한
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학I	이준열 외 7인	천재교육	2020	125,128,144
	고등학교 수학I	류희찬 외 10인	천재교과서	2020	125,129,142
	고등학교 미적분	권오남 외 14인	교학사	2020	19

5. 문항해설

(1) 수열의 극한과 수열의 합의 관계를 이용하여 수열의 일반항을 구한다.
(2) 수열의 일반항을 구하여 최솟값을 구한다.
(3) 수열의 합의 극한값을 구한다.

6. 평가기준

[1단계] 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 자연수 공차를 각각 p와 q라 하면, 조건 ①로부터

$$2=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n}=p-q,\quad 180=\sum_{n=1}^{10}(a_n-b_n)=10(a_1-b_1)+45(p-q)$$

이다. 따라서 $a_1-b_1=9$, $p-q=2$이다. 이로부터 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=a_1+(n-1)p=b_1+9+(n-1)(q+2)=b_n+2n+7>b_n$$

이며 $a_n>b_n$을 만족한다.

[2단계] 조건 ②로부터 $a_n+b_n<0\ (n\le 7)$과 $a_n+b_n>0\ (n\ge 8)$을 얻는다. 따라서 $2b_n<a_n+b_n<0\ (n\le 7)$이며 $b_n<0\ (n\le 7)$이다. 이를 이용하여 조건 ③으로부터 $\sum_{n=1}^{4}|b_n|=-\sum_{n=1}^{4}b_n=-(4b_1+6q)=88$, 즉 $2b_1=-3q-44$ 또는 $b_1=-\frac{3}{2}q-22$를 얻는다.

[3단계] 구해진 결과 $a_1=b_1+9$, $p=q+2$, $a_7+b_7<0$, $a_8+b_8>0$을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$0>a_7+b_7=(a_1+b_1)+6(p+q)=2b_1+9+6(2q+2)=-3q-35+12q+12=9q-23$$
$$0<a_8+b_8=(a_1+b_1)+7(p+q)=2b_1+9+7(2q+2)=-3q-35+14q+14=11q-21$$

따라서 $1<\frac{21}{11}<q<\frac{23}{9}<3$을 만족하는 자연수 공차 q는 2이다. 공차 $q=2$를 다음 결과에 대입하면

$$\begin{cases}p=q+2,\\ b_1=-\frac{3}{2}q-22,\\ a_1=b_1+9,\end{cases}$$

공차 $p=4$, 첫째항 $b_1=-25$, $a_1=-16$이다.
그러므로 일반항 $a_n=a_1+(n-1)p=4n-20$, $b_n=b_1+(n-1)q=2n-27$이다.

[4단계] (1)의 결과를 이용하면 수열 $\{c_n\}$의 일반항을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c_n = |a_n| - |b_n| = |4n-20| - |2n-27| = \begin{cases} -2n-7, & (n \le 5) \\ 6n-47, & (6 \le n \le 13) \\ 2n+7, & (n \ge 14) \end{cases}$$

그러므로 c_n이 최소가 되는 항은 $n=5$이며 최솟값은 $c_5 = -17$이다.

[5단계] (2)의 결과로부터 $n \ge 14$에 대하여 S_n은 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{13} c_k + \sum_{k=14}^{n} c_k \\ &= \sum_{k=1}^{13} c_k + \sum_{k=14}^{n} (2k+7) \\ &= \sum_{k=1}^{13} c_k + 2\frac{n(n+1)}{2} + 7n - \sum_{k=1}^{13} (2k+7) \end{aligned}$$

그러므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} = 1$이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계의 풀이 과정이 매끄럽고 모든 소문항의 답을 정확하게 얻은 경우	S
	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계를 작성하고 모든 소문항의 답을 얻은 경우	A
중	[1단계]부터 [5단계] 중 네 단계를 작성하고 3개의 소문항의 답을 얻은 경우	B
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 2개의 소문항의 답을 얻은 경우	C
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 1개의 소문항의 답을 얻은 경우	D
하	[1단계]부터 [5단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 풀이 과정이 매끄럽게 작성하지 못하거나 전혀 작성하지 않은 경우	F

7. 예시답안

(1) 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 공차를 각각 p와 q라 하면, 조건 ①로부터

$$2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{n} = p - q, \quad 180 = \sum_{n=1}^{10} (a_n - b_n) = 10(a_1 - b_1) + 45(p-q)$$

이다. 따라서 $a_1 - b_1 = 9$, $p - q = 2$이다. 이로부터 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = a_1 + (n-1)p = b_1 + 9 + (n-1)(q+2) = b_n + 2n + 7 > b_n$$

이며 $a_n > b_n$을 만족한다.

조건 ②로부터 $a_n + b_n < 0$ $(n \le 7)$과 $a_n + b_n > 0$ $(n \ge 8)$을 얻는다. 그러므로 $2b_n < a_n + b_n < 0$ $(n \le 7)$이며 $b_n < 0$ $(n \le 7)$이다.

이를 이용하여 조건 ③으로부터 $\sum_{n=1}^{4} |b_n| = -\sum_{n=1}^{4} b_n = -(4b_1 + 6q) = 88$, 즉 $2b_1 = -3q - 44$ 또는 $b_1 = -\frac{3}{2}q - 22$를 얻

는다. 구해진 결과 $a_1=b_1+9$, $p=q+2$, $a_7+b_7<0$, $a_8+b_8>0$을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$0>a_7+b_7=(a_1+b_1)+6(p+q)=2b_1+9+6(2q+2)=-3q-35+12q+12=9q-23$$
$$0<a_8+b_8=(a_1+b_1)+7(p+q)=2b_1+9+7(2q+2)=-3q-35+14q+14=11q-21$$

따라서 $1<\dfrac{21}{11}<q<\dfrac{23}{9}<3$을 만족하는 자연수 공차 q는 2이다. 공차 $q=2$를 다음 결과에 대입하면

$$\begin{cases} p=q+2, \\ b_1=-\dfrac{3}{2}q-22, \\ a_1=b_1+9, \end{cases}$$

공차 $p=4$, 첫째항 $b_1=-25$, $a_1=-16$이다.
그러므로 일반항 $a_n=a_1+(n-1)p=4n-20$, $b_n=b_1+(n-1)q=2n-27$이다.

(2) (1)의 결과를 이용하면 수열 $\{c_n\}$의 일반항을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c_n=|a_n|-|b_n|=|4n-20|-|2n-27|=\begin{cases} -2n-7, & (n\le 5) \\ 6n-47, & (6\le n\le 13) \\ 2n+7, & (n\ge 14) \end{cases}$$

그러므로 c_n이 최소가 되는 항은 $n=5$이며 최솟값은 $c_5=-17$이다.

(3) (2)의 결과로부터 $n\ge 14$에 대하여 S_n은 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{13} c_k + \sum_{k=14}^{n} c_k \\ &= \sum_{k=1}^{13} c_k + \sum_{k=14}^{n} (2k+7) \\ &= \sum_{k=1}^{13} c_k + 2\frac{n(n+1)}{2} + 7n - \sum_{k=1}^{13}(2k+7) \end{aligned}$$

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}=1$이다.

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2026학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	접선의 방정식, 변곡점
예상 소요 시간	40분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다.

– 『고등학교 수학II』

【나】 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P$(a, f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀌거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀔 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라고 한다.

– 『고등학교 미적분』

【다】 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면, 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

– 『고등학교 미적분』

[문제3] 다음 〈조건〉을 만족하는 점 P가 존재하는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서 접선의 기울기의 최댓값 M을 다음 순서에 따라 구하시오.

(단, $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수)

〈 조 건 〉

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선 l이 점 P가 아닌 곡선 위의 점 Q에서 만나고, 점 Q에서의 접선 m이 직선 l과 수직이다.

(1) 곡선 $y=f(x)$를 x축 및 y축의 방향으로 적절히 평행이동하여 항의 개수가 최소가 되는 곡선

$y=g(x)$를 구하시오.

(2) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $P_0(t, g(t))$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(3) (2)에서 구한 접선과 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점 $Q_0(\neq P_0)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(4) M의 값을 구하시오.

3. 출제의도

곡선 위의 점에서 접선의 방정식을 구할 수 있는지 평가하고, 평행이동을 통해 문제를 간단한 형태로 변환한 후 변곡점에서 접선의 기울기의 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학II (2) 미분 ③ 도함수의 활용 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학II	배종숙 외 6인	금성출판사	2020	73
	고등학교 미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2020	130

5. 문항해설

(1) 곡선의 변곡점(예시답안1) 또는 극점(예시답안2)을 원점으로 평행이동하여 문제를 간단한 형태로 바꾼다.
(2) 간단히 변환한 곡선 위의 점에서 접선의 방정식을 구한다.
(3) (2)에서 구한 접선과 곡선의 교점을 구하고 이 교점에서 접선의 방정식을 구한다.
(4) (2)와 (3)에서 구한 두 접선의 수직 조건으로부터 변곡점에서 접선의 기울기의 최댓값을 구한다.

6. 평가기준

[예시답안1 기준]

(1) 곡선 $y=f(x)$를 평행이동하여 곡선 $y=g(x)$, $g(x)=ax^3+bx$ 형태로 변형한다.

(2) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $P_0(t, at^3+bt)$에서의 접선의 방정식은 $y=(3at^2+b)x-2at^3$이다.

(3) (2)에서 구한 접선과 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점 $Q_0(\neq P_0)$의 좌표를 구하면 $Q_0(-2t, -8at^3-2bt)$이고, 점 Q_0에서의 접선의 방정식은 $y=(12at^2+b)x+16at^3$이다.

(4) (2)와 (3)에서 구한 두 접선이 수직이므로

$$(3at^2+b)(12at^2+b)=-1 \iff t^2=\frac{-5b\pm\sqrt{9b^2-16}}{24a}$$

을 만족하는 0이 아닌 실수 t가 존재해야 하는데, 이 조건으로부터 $b\leq-\frac{4}{3}$를 얻는다. 한편 구하고자 하는 최댓값 M은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점에서의 접선의 기울기의 최댓값이다. 곡선 $y=g(x)$의 변곡점인 원점에서의 접선의 기울기는 $g'(0)=b\leq-\frac{4}{3}$이므로 M의 값은 $-\frac{4}{3}$이다.

	채점 기준	배점
상	(1)을 예시답안1, 2처럼 해결하고 (2), (3), (4)까지 모두 구한 경우 (※예시답안3으로 푼 경우 (1) 생략 가능)	S
	(1)을 예시답안1, 2처럼 해결하고 (2), (3), 그리고 (4)의 수직 조건까지만 구한 경우	A
중	(1)을 예시답안1, 2처럼 해결하고 (2), (3)까지만 구한 경우 또는 (1)을 예시답안1, 2처럼 간단히 변환하는 과정을 거치지 않고 (2), (3), 그리고 (4)의 수직 조건까지만 구한 경우	B
	(1)을 예시답안1, 2처럼 해결하고 (2)와 (3)의 교점의 좌표까지만 구한 경우 또는 (1)을 예시답안1, 2처럼 간단히 변환하는 과정을 거치지 않고 (2), (3)까지만 구한 경우	C
	(1)을 예시답안1, 2처럼 해결하고 (2)까지만 구한 경우 또는 (1)을 예시답안1, 2처럼 간단히 변환하는 과정을 거치지 않고 (2)와 (3)의 교점의 좌표까지만 구한 경우	D
하	(1)만 예시답안1, 2처럼 해결한 경우 또는 (1)을 예시답안처럼 간단히 변환하는 과정을 거치지 않고 (2)의 접선의 방정식까지만 구한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 풀이 과정이 매끄럽게 작성하지 못하거나 전혀 작성하지 않은 경우	F

<※채점시 주의사항>

1. 예시답안3처럼 (4) M의 값까지 구한 경우 간단히 변환하는 과정인 (1)의 풀이가 없더라도 S를 부여한다.

2. (1)에서 $y=ax^3+bx^2+cx$, $y=ax^3+bx^2+c$, $y=ax^3+bx+c$, 또는 $y=ax^3+bx^2+cx+d$로 변형하여 (2), (3), (4)를 해결하려고 시도한 풀이는 위 채점 기준에서 “(1)을 예시답안1, 2처럼 간단히 변환하는 과정을 거치지 않고” 에 해당한다.

3. (1)에서 $y=ax^3$ 또는 $y=ax^3+b$로 변형하여 (2), (3), (4)를 해결하려고 시도한 풀이는 잘못된 풀이이다. 왜냐하면 이 두 꼴의 경우 문제에서 주어진 조건을 만족하지 못하기 때문이다. 이런 풀이의 경우 채점위원의 판단에 따라 최대 E까지만 부여하길 권장한다.

7. 예시답안

[예시답안1]

(1) 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 먼저 곡선 $y=f(x)$를 적당히 x축으로 평행이동하면 2차항을 소거할 수 있고 그후 적당히 y축으로 평행이동하면 상수항을 소거할 수 있다. 따라서 $y=g(x)$에서 삼차함수 $g(x)$의 항의 개수가 최소가 되도록 평행이동하면 $g(x)=ax^3+bx$ $(a>0)$ 형태로 변형할 수 있다.

(1)$'$ 위와 다른 풀이로, 먼저 곡선 $y=f(x)$가 주어진 조건을 만족해야 하기 때문에 변곡점에서의 접선의 기울기는 음수가 되어야 한다. 따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점을 원점으로 평행이동시키면 적당한 양수 α가 존재하여 $x=-\alpha, \alpha$에서 각각 x축과 만나므로 $g(x)=ax(x-\alpha)(x+\alpha)=ax^3-a\alpha^2x=ax^3+bx$ $(a>0)$ 형태로 변형할 수 있다. (단, $b=-a\alpha^2$)

(2) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}_0(t, at^3+bt)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y-at^3-bt=(3at^2+b)(x-t) \Leftrightarrow y=(3at^2+b)x-2at^3$$

이다.

(3) (2)에서 구한 접선과 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점 Q_0의 x좌표는

$$\begin{aligned} ax^3+bx=(3at^2+b)x-2at^3 &\Leftrightarrow ax^3-3at^2x+2at^3=0 \\ &\Leftrightarrow (x-t)^2(x+2t)=0 \\ &\Leftrightarrow x=t, -2t \end{aligned}$$

를 만족하고, 여기서 $\mathrm{Q}_0 \neq \mathrm{P}_0$이므로 $t \neq 0$이며 Q_0의 좌표는 $\mathrm{Q}_0(-2t, -8at^3-2bt)$이다. 따라서 점 Q_0에서의 접선의 방정식은

$$y+8at^3+2bt=(12at^2+b)(x+2t) \Leftrightarrow y=(12at^2+b)x+16at^3$$

이다.

(4) (2)와 (3)에서 구한 두 접선이 수직이므로

$$\begin{aligned} (3at^2+b)(12at^2+b)=-1 &\Leftrightarrow 36a^2t^4+15abt^2+b^2+1=0 \\ &\Leftrightarrow t^2=\frac{-5b\pm\sqrt{9b^2-16}}{24a} \end{aligned}$$

을 만족하는 0이 아닌 실수 t가 존재해야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} & 9b^2-16 \geq 0 \text{ 그리고 } (-5b+\sqrt{9b^2-16}>0 \text{ 또는 } -5b-\sqrt{9b^2-16}>0) \\ \Leftrightarrow\ & 9b^2-16 \geq 0 \text{ 그리고 } b<0 \\ \Leftrightarrow\ & b \leq -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

를 얻는다. 한편 구하고자 하는 최댓값 M은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점에서 접선의 기울기의 최댓값이다. 곡선 $y=g(x)$의 변곡점을 먼저 구해보면

$$g''(x)=6ax=0 \Leftrightarrow x=0$$

으로부터 원점이 곡선 $y=g(x)$의 변곡점임을 알 수 있다. 이제 원점에서 접선의 기울기는 $g'(0)=b\leq -\frac{4}{3}$이므로 최댓값 M은 $-\frac{4}{3}$이다.

[참고사항] $y=x^3-\frac{4}{3}x$일 때, 점 P$(\frac{\sqrt{10}}{6}, -\frac{19\sqrt{10}}{108})$과 점 Q$(-\frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{27})$에서 두 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x-\frac{5\sqrt{10}}{54} \\ y &= 2x+\frac{20\sqrt{10}}{27} \end{aligned}$$

이며 수직이다.

[예시답안2]

(1) 먼저 곡선 $y=f(x)$가 주어진 조건을 만족해야 하기 때문에 변곡점에서 접선의 기울기는 음수가 되어야 한다. 따라서 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 가져야 한다. 극대 또는 극소가 되는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점을 원점으로 평행이동하면 $y=g(x)$, $g(x)=ax^3+bx^2$ $(a>0)$형태로 변형할 수 있다.

(2) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}_0(t, at^3+bt^2)$에서 접선의 방정식을 구하면

$$y-at^3-bt^2=(3at^2+2bt)(x-t) \Leftrightarrow y=(3at^2+2bt)x-2at^3-bt^2$$

이다.

(3) (2)에서 구한 접선과 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점 Q_0의 x좌표는

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2=(3at^2+2bt)x-2at^3-bt^2 &\Leftrightarrow ax^3+bx^2-(3at^2+2bt)x+2at^3+bt^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-t)^2(ax+2at+b)=0 \\ &\Leftrightarrow x=t,\ -2t-\frac{b}{a} \end{aligned}$$

를 만족하고, 여기서 $\mathrm{Q}_0 \neq \mathrm{P}_0$이므로 $t \neq -\dfrac{b}{3a}$이며 Q_0의 좌표는 $\mathrm{Q}_0(-2t-\dfrac{b}{a}, -8at^3-8bt^2-\dfrac{2b^2}{a}t)$이다. 따라서 점 Q_0에서의 접선의 방정식은

$$y+8at^3+8bt^2+\frac{2b^2}{a}t=(12at^2+8bt+\frac{b^2}{a})(x+2t+\frac{b}{a}) \Leftrightarrow y=(12at^2+8bt+\frac{b^2}{a})x+16at^3+20bt^2+\frac{8b^2}{a}t+\frac{b^3}{a^2}$$

이다.

(4) $g(x)=ax^3+bx^2$를 미분한 $g'(x)=3ax^2+2bx$, $g''(x)=6ax+2b$에서 변곡점의 x좌표는 $-\dfrac{b}{3a}$이므로 변곡점에서 기울기는 $g'(-\dfrac{b}{3a})=-\dfrac{b^2}{3a}$이다. (2)와 (3)에서 구한 두 접선이 수직이므로

$$(3at^2+2bt)(12at^2+8bt+\frac{b^2}{a})=-1 \Leftrightarrow b^3t(3\frac{a}{b}t+2)(6\frac{a}{b}t+1)(2\frac{a}{b}t+1)=-a$$

에서 $s=\dfrac{a}{b}t$로 치환하여 $h(s)=\dfrac{b^4}{a}s(3s+2)(6s+1)(2s+1)$로 두면 위 식은 $h(s)=-a$이다.

$$h'(s)=\frac{2b^4}{a}(3s+1)(24s^2+16s+1)=0 \Leftrightarrow s=-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{10}}{12}$$

이므로 $h(s)$의 최솟값은 $h(-\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{\sqrt{10}}{12})=-\dfrac{b^4}{16a}$이다. $h(s)=-a$를 만족하는 실수 s가 존재하기 위한 필요충분조건은

$$h(-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{10}}{12})=-\frac{b^4}{16a}\leq -a \Leftrightarrow -\frac{b^4}{a^2}\leq -16 \Leftrightarrow -\frac{b^2}{a}\leq -4 \Leftrightarrow g'(-\frac{b}{3a})=-\frac{b^2}{3a}\leq -\frac{4}{3}$$

이다. 그러므로 최댓값 M은 $-\dfrac{4}{3}$이다.

[예시답안3]

곡선 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$를 평행이동하지 않고 직접 M의 값을 다음처럼 구할 수도 있다.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$, $f''(x)=6ax+2b$로부터 변곡점의 x좌표를 $-\dfrac{b}{3a}$로 구한다. 변곡점에서 접선의 기울기는 $f'(-\dfrac{b}{3a})=-\dfrac{1}{3}(\dfrac{b^2}{a}-3c)$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,f(t))$에서 접선 l의 방정식은

$$y-ax^3-bx^2-cx-d=(3at^2+2bt+c)(x-t)$$

이고 접선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 $\mathrm{Q}(\neq \mathrm{P})$의 x좌표는

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d=(3at^2+2bt+c)x-2at^3-bt^2+d \ &\Leftrightarrow\ (x-t)^2(ax+2at+b)=0 \\ &\Leftrightarrow\ x=t,\ -2t-\frac{b}{a} \end{aligned}$$

를 만족한다. 여기서 $\mathrm{Q}\neq\mathrm{P}$이므로 $t\neq-\dfrac{b}{3a}$이며 따라서 점 Q에서 접선 m의 기울기는

$$f'(-2t-\frac{b}{a})=12at^2+8bt+\frac{b^2}{a}+c$$

이다. 두 직선 l,m이 수직이므로

$$(3at^2+2bt+c)(12at^2+8bt+\frac{b^2}{a}+c)=-1$$

이다. $s=3at^2+2bt$로 치환하여 $h(s)=4s^2+(\dfrac{b^2}{a}+5c)s+c(\dfrac{b^2}{a}+c)+1$이라 하면 위 식은 $h(s)=0$이 된다. 방정식 $h(s)=0$이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $D=(\dfrac{b^2}{a}-3c)^2-16\geq 0$, 즉

$$\frac{b^2}{a}-3c\geq 4 \text{ 또는 } \frac{b^2}{a}-3c\leq -4 \quad \cdots\cdots(\star)$$

이어야 한다. 일단 $s=3at^2+2bt$는 t에 관한 이차방정식이므로 $s=3at^2+2bt\geq-\dfrac{b^2}{3a}$인 범위에서 $h(s)=0$의 근이 존재해야 한다. $h(-\dfrac{b^2}{3a})=\dfrac{1}{9}(\dfrac{b^2}{a}-3c)^2+1>0$이므로 $y=h(s)$의 대칭축 $s=-\dfrac{\frac{b^2}{a}+5c}{8}$이 $s=-\dfrac{b^2}{3a}$의 오른쪽에 위치해야 하므로

$$-\frac{\frac{b^2}{a}+5c}{8}>-\frac{b^2}{3a}\ \Leftrightarrow\ \frac{b^2}{a}-3c>0$$

을 얻는다. 따라서 $(\star)$에서 $\dfrac{b^2}{a}-3c\geq 4$이 성립해야 한다. 그러므로 $f'(-\dfrac{b}{3a})=-\dfrac{1}{3}(\dfrac{b^2}{a}-3c)\leq-\dfrac{4}{3}$이므로 최댓값 M은 $-\dfrac{4}{3}$이다.