2025학년도 동국대학교 수시모집
논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2025학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 기하
	핵심개념 및 용어	벡터의 내적, 근과 계수의 관계, 이차함수의 최댓값
예상 소요 시간	27분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 x가 모든 실수의 값을 가질 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ $(a\neq 0)$의 최댓값과 최솟값은

$a>0$이면 $x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.

$a<0$이면 $x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.

-『고등학교 수학』

【나】 a, b, c가 실수일 때, 방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

-『고등학교 수학』

【다】 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2)$와 $\vec{b}=(b_1,b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때,

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

-『고등학교 기하』

[문제1] 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(0,1)$가 주어져 있고 이차함수 $y=x^2+\left(\frac{1}{3}-2k\right)x+k$와 직선 $y=x$의 두 교점을 Q_1, Q_2라고 하자. 점 P와 점 Q_1, 점 P와 점 Q_2를 지나는 직선을 각각 ℓ_1, ℓ_2라고 하자. 두 직선 ℓ_1, ℓ_2가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 제시문을 이용하여 다음을 구하시오. (단,

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$)

(1) $\cos\theta$를 실수 k를 이용하여 나타내시오.

(2) θ가 최솟값을 가질 때의 실수 k의 값과 그때의 θ를 구하시오.

(3) θ가 최솟값을 가질 때의 점 Q_1, Q_2의 좌표를 구하시오.

3. 출제의도

이차곡선과 직선의 교점을 연립방정식으로 구하고 평면벡터에서의 내적의 정의와 성질을 통하여 문제에서 구하고자 하는 두 직선이 이루는 각도를 표현하는 과정을 확인한다. 방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 제시된 값을 구체적으로 구하고 최솟값을 찾을 수 있는지 평가한다.

4. 출제근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 (1) 문자와 식 ④ 복소수와 이차방정식 수학 (1) 문자와 식 ⑤ 이차방정식과 이차함수 기하 (2) 평면벡터 ② 평면벡터의 성분과 내적
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [12기하02-04] 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	홍성복 외 10인	지학사	2020	74
	고등학교 수학	홍성복 외 10인	지학사	2020	61
	고등학교 기하	황선욱 외 8인	미래엔	2020	100

5. 문항해설

1. 이차곡선과 직선의 교점의 좌표를 방정식의 해로 나타낸다.
2. 두 직선이 이루는 각도의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta$ 값을 벡터의 내적으로 표현한다.
3. 방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 코사인 값을 k에 대한 식으로 표현한다.
4. 이차함수의 최솟값의 성질을 이용하여 $\cos\theta$의 최댓값과 각도 θ의 최솟값을 구하고 그때의 k의 값을 얻는다.
5. 이 k값을 이용하여 구하고자 하는 교점 Q_1, Q_2의 좌표를 구한다.

6. 평가기준

[단계 1] 이차함수 $y=x^2+\left(\frac{1}{3}-2k\right)x+k$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 방정식 $x^2-2\left(\frac{1}{3}+k\right)x+k=0$의 해이다. 이 방정식의 판별식은 $\frac{D}{4}=\left(k+\frac{1}{3}\right)^2-k=\left(k-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}>0$이므로 두 실수해 α, β를 가진다. 이 경우 두 교점은 점 $\mathrm{Q}_1(\alpha,\alpha)$과 점 $\mathrm{Q}_2(\beta,\beta)$이다.

[단계 2] 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}_1}=(\alpha,\alpha-1)$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}_2}=(\beta,\beta-1)$라고 놓으면, 제시문 **【다】** 에 의하여 다음을 얻는다.

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\alpha\beta+(\alpha-1)(\beta-1)}{\sqrt{\alpha^2+(\alpha-1)^2}\sqrt{\beta^2+(\beta-1)^2}}$$

[단계 3] 두 수 α, β는 $x^2-2\left(\frac{1}{3}+k\right)x+k=0$의 해이므로, 제시문 **【나】** 에 의하여 $\alpha+\beta=2k+\frac{2}{3}$, $\alpha\beta=k$이다. $\cos\theta$의 값에 대한 위의 식을 정리하면 다음을 얻는다.

$$\cos\theta=\frac{\alpha\beta+(\alpha-1)(\beta-1)}{\sqrt{\alpha^2+(\alpha-1)^2}\sqrt{\beta^2+(\beta-1)^2}}=\frac{2\alpha\beta-\alpha-\beta+1}{\sqrt{4\alpha^2\beta^2-2(2\alpha\beta-\alpha-\beta+1)(\alpha+\beta)+1}}=\frac{1}{\sqrt{(6k-1)^2+4}}$$

이때 $\cos\theta>0$이므로 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 임을 확인할 수 있다.

[단계 4] $\frac{1}{4\cos^2\theta}=9\left(k-\frac{1}{6}\right)^2+1$ 이므로 제시문 **【가】** 에 의하여 $k=\frac{1}{6}$일 때, $\frac{1}{4\cos^2\theta}$는 최솟값 1을 가진다. $\cos\theta$는 양수이므로 그때의 $\cos\theta$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 θ의 최솟값은 $\frac{\pi}{3}$이다.

[단계 5] $k=\frac{1}{6}$일 때, 연립방정식 $x^2-x+\frac{1}{6}=0$을 풀면 $\alpha=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $\beta=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ (또는 $\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, $\beta=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$) 으로 점 Q_1, Q_2의 좌표는 $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$ 이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계의 논증이 매끄럽고 모든 소문항의 답을 정확하게 얻은 경우	S
	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계를 작성하고 모든 소문항의 답을 얻은 경우	A
중	[1단계]부터 [5단께] 중 네 단계를 작성하고 2개의 소문항의 답을 얻은 경우	B
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 1개의 소문항의 답을 얻은 경우	C
	[1단계]부터 [5단계] 중 두 단계를 작성한 경우	D
하	[1단계]부터 [5단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

(1) 이차함수 $y=x^2+\left(\frac{1}{3}-2k\right)x+k$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 두 식을 연립한 방정식 $x^2-2\left(\frac{1}{3}+k\right)x+k=0$의 해이다. 이 방정식의 판별식은 $\frac{D}{4}=\left(k+\frac{1}{3}\right)^2-k=\left(k-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}>0$ 이므로 두 실수해 α, β를 가진다. 이 경우

두 교점은 점 $Q_1(\alpha, \alpha)$과 점 $Q_2(\beta, \beta)$이다. 벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{PQ_1} = (\alpha, \alpha - 1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{PQ_2} = (\beta, \beta - 1)$라고 놓으면, 제시문 **【다】** 에 의하여 $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{\alpha\beta + (\alpha - 1)(\beta - 1)}{\sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 1)^2}\sqrt{\beta^2 + (\beta - 1)^2}}$ 이다. 두 수 α, β는 제시문 **【나】** 에 의하여 $\alpha + \beta = 2k + \dfrac{2}{3}$, $\alpha\beta = k$이다. 따라서 $\cos\theta$의 값에 대한 위의 식을 정리하면

$$\cos\theta = \frac{\alpha\beta + (\alpha - 1)(\beta - 1)}{\sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 1)^2}\sqrt{\beta^2 + (\beta - 1)^2}} = \frac{2\alpha\beta - \alpha - \beta + 1}{\sqrt{4\alpha^2\beta^2 - 2(2\alpha\beta - \alpha - \beta + 1)(\alpha + \beta) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(6k - 1)^2 + 4}}$$

이다.

(2) $\dfrac{1}{4\cos^2\theta} = 9\left(k - \dfrac{1}{6}\right)^2 + 1$ 이므로 제시문 **【가】** 에 의하여 $k = \dfrac{1}{6}$일 때, $\dfrac{1}{4\cos^2\theta}$는 최솟값 1을 가진다. $\cos\theta > 0$이므로 $\cos\theta$의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이고 θ의 최솟값은 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

(3) $k = \dfrac{1}{6}$일 때, 연립방정식 $x^2 - x + \dfrac{1}{6} = 0$을 풀면 $\alpha = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{6}$, $\beta = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{6}$ (또는 $\alpha = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{6}$, $\beta = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{6}$)으로 점 Q_1, Q_2의 좌표는 $\left(\dfrac{3 + \sqrt{3}}{6}, \dfrac{3 + \sqrt{3}}{6}\right)$, $\left(\dfrac{3 - \sqrt{3}}{6}, \dfrac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)$ 이다.

2025학년도 동국대학교 수시모집
논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">2025학년도 수시모집 논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열 / 문제2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>확률과 통계</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>이항분포, 정규분포</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">27분 / 전체 90분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

【가】 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하자. 이때 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0,1,2,\cdots,n$이고, X의 확률질량함수는 다음과 같고, 이와 같은 분포를 이항분포 $B(n,p)$라 한다.

$$P(X=x)={}_nC_x\, p^x q^{n-x} \qquad (\text{단, } x=0,1,2,\cdots,n,\quad q=1-p)$$

-『고등학교 확률과 통계』

【나】 실수 전체의 집합에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

일 때, X의 확률분포를 정규분포라고 한다. 여기서 m과 $\sigma(\sigma>0)$는 각각 연속확률변수 X의 평균과 표준편차를 나타내는 상수이고, e는 값이 $2.71828\cdots$인 무리수이다. 또한, $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$는 표준정규분포를 따른다.

-『고등학교 확률과 통계』

【다】 확률변수 Z가 표준정규분포를 따를 때 $\mathrm{P}(0\le Z\le z)$의 값을 소숫점 이하 셋째 자리에서 반올림한 값은 다음과 같다.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$	z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.13	0.05	0.58	0.22
0.25	0.10	0.84	0.30
0.39	0.15	1.28	0.40
0.52	0.20	1.55	0.44

-『고등학교 확률과 통계』

[문제2] 체질량지수$(\mathrm{kg/m^2})$는 체중을 키의 제곱으로 나눈 값으로 비만의 정도를 나타내는 지표이다. 체질량지수가 23 이상에서 25 미만이면 과체중, 25 이상이면 비만으로 판정한다. 어느 고등학교 학생들의 체질량지수는 정규분포를 따른다고 한다. 과체중 또는 비만일 확률은 $\frac{1}{2}$ 미만인 것으로 알려져 있다. 임의로 3명을 뽑았을 때 과체중이 1명일 확률이 0.75^3이고, 임의로 3명을 뽑았을 때 비만이 1명일 확률은 $\frac{48}{125}$이라면 체질량지수가 23 초과 27 이하일 확률을 제시문을 이용하여 구하시오. *(지문 속 단어 '과체중', '비만'을 문제 출제 의도와 같이 수정하였음. 실제 2025학년도 논술고사에서는 문제 오류로 인해 응시자 전원 정답 처리 한 문제임.)*

3. 출제의도

정규분포를 정하는데 필요한 평균과 기댓값을 특정사건의 발생빈도의 분포인 이항분포의 특성을 이용하여 산정하는 능력을 확인하고 유도된 평균과 분산을 이용해서 또 다른 사건의 확률을 구하는 응용 능력을 확인한다.

4. 출제근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	확률과 통계 (3) 통계 (가) 확률분포
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 확률과 통계	박교식 외 19인	동아출판사	2020	99, 102
	고등학교 확률과 통계	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2020	91

5. 문항해설

정규분포를 따르는 체질량지수가 23초과 27이하일 확률을 제시문 **【다】**의 표준정규분포표를 이용하여 산정하는 문제이다. 하지만 체질량지수의 평균 m과 분산 σ^2이 주어져 있지 않기 때문에 이들을 문제에서 주어진 조건으로부터 구해야 한다. 주어진 조건은 23이상 25미만을 과체중으로 정의하고, 3명 중 1명이 과체중일 확률을 이항분포로부터 산정한 값이 0.75^3인 관계식과 25이상을 비만이라고 정의하고 역시 3명 중 1명이 비만일 확률을 이항분포로부터 산정한 값이 $\frac{48}{125}$인 관계식이다. 이들을 이용하여 m, σ^2를 산정하여 최종적으로 23초과 27이하일 확률을 구한다. 이를 통해 이항분포와 정규분포의 이해 및 활용 능력을 평가한다.

6. 평가기준

[1 단계] 체질량지수 X의 분포는 정규분포이고, 과체중일 확률은 $p_1 = P(23 \le X < 25)$, 비만일 확률은 $p_2 = P(X \ge 25)$로 한다.

[2 단계] 3명 중 과체중인 사람 수 Y_1은 $B(3, p_1)$이므로 3명 중 1명의 확률이 0.75^3이라는 조건에 의해 다음 식을 구할 수 있다.

$$P(Y_1 = 1) = {}_3\mathrm{C}_1 p_1 (1-p_1)^2 = 3p_1(1-p_1)^2 = 0.75^3 = 3 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

이 식을 만족하는 p_1은 $\frac{1}{4}, \frac{7 \pm \sqrt{13}}{8}$이 됨을 알 수 있다.

[3 단계] 3명 중 비만인 사람 수 Y_2은 $B(3, p_2)$이므로 3명 중 1명의 확률이 $\frac{48}{125}$이라는 조건에 의해 다음 식을 구할 수 있다.

$$P(Y_2=1)={}_3\mathrm{C}_1p_2(1-p_2)^2=3p_2(1-p_2)^2=\frac{48}{125}=3\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

이 식을 만족하는 p_2는 $\frac{1}{5},\frac{9\pm\sqrt{17}}{10}$이 됨을 알 수 있다.

[4 단계] p_1, p_2는 확률이므로 0에서 1사이의 값이고, 과체중 또는 비만의 확률이 $\frac{1}{2}$미만이므로 $p_1+p_2<\frac{1}{2}$를 만족해야하므로 $p_1=\frac{1}{4}$, $p_2=\frac{1}{5}$이 된다.

[5 단계] $\frac{1}{4}=p_1=P(23\le X<25)$, $\frac{1}{5}=p_2=P(X\ge 25)$로부터 $P(X\ge 23)=P(23\le X<25)+P(X\ge 25)=\frac{9}{20}$를 확인할 수 있다. 따라서 $\frac{1}{5}=\frac{1}{2}-P\left(0\le Z\le\frac{25-m}{\sigma}\right)$, $\frac{9}{20}=\frac{1}{2}-P\left(0\le Z\le\frac{23-m}{\sigma}\right)$이 되므로 표준정규분포표를 이용하면 $\frac{25-m}{\sigma}=0.84$, $\frac{23-m}{\sigma}=0.13$이 된다.

[6 단계] 27을 표준화하면 $\frac{27-m}{\sigma}=\frac{25-m}{\sigma}+\frac{2}{\sigma}=0.84+0.71=1.55$가 되므로 체질량지수가 23초과 27이하일 확률 $P(23<X\le 27)=P(0.13<Z\le 1.55)=P(0\le Z\le 1.55)-P(0\le Z\le 0.13)=0.44-0.05=0.39$가 된다.

하위문항	채점 기준	배점
	[1단계]부터 [6단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]부터 [6단계]까지 모두 작성하고 다섯 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	A
	[1단계]부터 [6단계] 중 다섯 단계를 작성하고 네 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	B
	[1단계]부터 [6단계] 중 네 단계를 작성하고 세 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	C
	[1단계]부터 [6단계] 중 세 단계를 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	D
	[1단계]부터 [6단계] 중 두 단계를 작성하고 한 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

체질량지수 X는 평균과 분산이 각각 m, σ^2인 정규분포를 따른다. 과체중일 확률은 $p_1=P(23\le X<25)$이고 비만일 확률은 $p_2=P(X\ge 25)$라 하자.

임의로 3명을 뽑았을 때 비만인 사람의 수 Y_1은 이항분포 $B(3,p_1)$를 따르고 1명만이 비만일 확률은 $P(Y_1=1)={}_3\mathrm{C}_1p_1(1-p_1)^2=3p_1(1-p_1)^2=0.75^3=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$이므로 p_1은 $\frac{1}{4},\frac{7\pm\sqrt{13}}{8}$이 되는 것을 알 수 있다.

임의로 3명을 뽑았을 때 과체중인 사람 수 Y_2는 이항분포 $B(3,p_2)$를 따르고 1명만이 과체중일 확률은 $P(Y_2=1)={}_3\mathrm{C}_1p_2(1-p_2)^2=3p_2(1-p_2)^2=\frac{48}{125}=3\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2$이므로 p_2는 $\frac{1}{5},\frac{9\pm\sqrt{17}}{10}$이 되는 것을 알 수 있다.

p_1,p_2는 모두 0과 1사이의 값이며, 과체중 또는 비만의 확률이 $\frac{1}{2}$미만이므로 $p_1+p_2<\frac{1}{2}$를 만족해야 한

다. 따라서 $\frac{1}{4} = p_1 = P(23 \le X < 25)$, $\frac{1}{5} = p_2 = P(X \ge 25)$이 된다.

23 이상일 확률은 $P(X \ge 23) = P(23 \le X < 25) + P(X \ge 25) = \frac{9}{20}$으로 $\frac{1}{2}$보다 작으므로 $\frac{9}{20} = \frac{1}{2} - P\left(0 \le Z \le \frac{23-m}{\sigma}\right)$, $\frac{1}{5} = \frac{1}{2} - P\left(0 \le Z \le \frac{25-m}{\sigma}\right)$을 확인할 수 있다.

표준정규분포표를 이용하면 $\frac{25-m}{\sigma} = 0.84$, $\frac{23-m}{\sigma} = 0.13$이 되어 분산은 $\sigma^2 = \left(\frac{2}{0.71}\right)^2$이 된다.

체질량지수가 23 초과 27 이하일 확률은 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z가 $\frac{23-m}{\sigma} = 0.13$에서 $\frac{27-m}{\sigma} = \frac{25-m}{\sigma} + \frac{2}{\sigma} = 0.84 + 0.71 = 1.55$ 사이일 확률과 같으므로 다음과 같이 구한다.

$$P(23 < X \le 27) = P(0.13 < Z \le 1.55) = P(0 \le Z \le 1.55) - P(0 \le Z \le 0.13) = 0.44 - 0.05 = 0.39$$

2025학년도 동국대학교 수시모집
논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형		■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사
전형명		2025학년도 수시모집 논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열 / 문제3
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	정적분, 도형의 넓이
예상 소요 시간		36분 / 전체 90분

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) \ge 0$일 때, 정적분

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

-『고등학교 수학II』

【나】 함수 $y=x^r$(r은 실수)의 부정적분은

1) $r \neq -1$ **일 때,** $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$

2) $r = -1$ **일 때,** $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$

-『고등학교 미적분』

【다】 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad \textbf{(단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\textbf{)}$$

-『고등학교 미적분』

[문제3] 실수 α, β는 $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}=20n,\ \alpha+\beta=9n, \alpha>\beta>0$을 만족한다. 두 곡선 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$와 $y=\dfrac{3\alpha\beta(\alpha-\beta)}{5x}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 하자.

(단, n은 자연수)

(1) 두 곡선의 교점의 x좌표를 n을 이용하여 나타내시오.

(2) 교점을 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이를 A_n이라 할 때, A_n을 구하시오.

(3) S_n을 구하시오.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n}S_kA_{2k}$를 구하시오.

3. 출제의도

근과 계수의 관계를 이용하여 곡선을 찾고, 두 곡선이 이루는 교점, 곡선에 의하여 둘러싸인 도형의 넓이, 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다. 정적분의 정의를 활용한 적분 계산을 할 수 있는지 평가한다.

4. 출제근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (3) 다항함수의 적분법 ② 정적분의 활용 미적분 (3) 적분법 ① 여러가지 적분법 미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학II	이준열 외 7인	천재교육	2020	134
	고등학교 미적분	권오남 외 14인	교학사	2020	140
	고등학교 미적분	이준열 외 7인	천재교육	2020	165
	고등학교 미적분	홍성복	지학사	2020	163

5. 문항해설

1. 근과 계수의 관계를 이용하여 방정식을 구한다.
2. 방정식을 이용하여 두 곡선의 교점을 구한다.
3. 점과 직선과의 거리를 이용하여 교점들을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구한다.
4. 정적분을 이용하여 두 곡선에 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.
5. 급수의 합의 극한을 정적분의 정의를 이용하여 구한다.

6. 평가기준

[1단계] 주어진 조건으로부터 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=81n^2-80n(\alpha-\beta)$이고 $(\alpha-\beta)^2+80n(\alpha-\beta)-81n^2=0$을 만족한다. $\alpha-\beta>0$이므로 만족하는 해는 $\alpha-\beta=n$이고 곡선은 $y=x^2-9nx+20n^2$, $y=\dfrac{12n^3}{x}$이다.

[2단계] 두 곡선의 교점을 찾기 위하여 $x^2-9nx+20n^2=\dfrac{12n^3}{x}$라 두자. 식을 정리하면 $x^3-9nx^2+20n^2x=12n^3$이 되고 인수분해 하면 $(x-n)(x-2n)(x-6n)=0$이다.
따라서, $x=n$ 또는 $x=2n$ 또는 $x=6n$이다.

[3단계] 교점은 $(n,12n^2),(2n,6n^2),(6n,2n^2)$이며 두 점 $(n,12n^2),(6n,2n^2)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-2nx+14n^2$이다. 점 $(2n,6n^2)$에서 직선까지 거리는 $d=\dfrac{|2n(2n)+1(6n^2)-14n^2|}{\sqrt{(2n)^2+1^2}}=\dfrac{4n^2}{\sqrt{4n^2+1}}$, 두 점 $(n,12n^2),(6n,2n^2)$사이의 거리는 $h=5n\sqrt{1+4n^2}$이다. 그러므로 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $A_n=\dfrac{dh}{2}=10n^3$ 이다.

[4단계] 위의 결과로부터, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S_n은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}S_n&=\int_n^{6n}\left|x^2-9nx+20n^2-\frac{12n^3}{x}\right|dx\\&=\int_n^{2n}\left(x^2-9nx+20n^2-\frac{12n^3}{x}\right)dx-\int_{2n}^{6n}\left(x^2-9nx+20n^2-\frac{12n^3}{x}\right)dx\\&=\left[\frac{x^3}{3}\right]_n^{2n}-9n\left[\frac{x^2}{2}\right]_n^{2n}+20n^2[x]_n^{2n}-12n^3[\ln|x|]_n^{2n}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{2n}^{6n}+9n\left[\frac{x^2}{2}\right]_{2n}^{6n}-20n^2[x]_{2n}^{6n}+12n^3[\ln|x|]_{2n}^{6n}\\&=\frac{7}{3}n^3-\frac{27}{2}n^3+20n^3-12n^3\ln2-\frac{208}{3}n^3+144n^3-80n^3+12n^3\ln3\end{aligned}$$

식을 정리 하면 $S_n=\dfrac{7}{2}n^3+12n^3\ln\dfrac{3}{2}=\left(\dfrac{7}{2}+12\ln\dfrac{3}{2}\right)n^3$이다.

[5단계] 제시문 **【다】**에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n}S_kA_{2k}&=10\left(\frac{7}{2}+12\ln\frac{3}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(\frac{2k}{2n}\right)^3\frac{2^3}{n}\\&=80\left(\frac{7}{2}+12\ln\frac{3}{2}\right)\int_0^1x^6dx=\frac{80}{7}\left(\frac{7}{2}+12\ln\frac{3}{2}\right)=40+\frac{960}{7}\ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계의 논증이 매끄럽고 모든 소문항의 답을 정확하게 얻은 경우	S
	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계를 작성하고 모든 소문항의 답을 얻은 경우	A
중	[1단계]부터 [5단계] 중 네 단계를 작성하고 3개의 소문항의 답을 얻은 경우	B
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 2개의 소문항의 답을 얻은 경우	C
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 1개의 소문항의 답을 얻은 경우	D
하	[1단계]부터 [5단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

(1) 주어진 조건으로부터 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=81n^2-80n(\alpha-\beta)$이고 $(\alpha-\beta)^2+80n(\alpha-\beta)-81n^2=0$을 만족한다. $\alpha-\beta>0$이므로 만족하는 해는 $\alpha-\beta=n$이고 곡선은 $y=x^2-9nx+20n^2$, $y=\dfrac{12n^3}{x}$이다.

두 곡선의 교점을 찾기 위하여 $x^2-9nx+20n^2=\dfrac{12n^3}{x}$라 두자. 식을 정리하면 $x^3-9nx^2+20n^2x=12n^3$이 되고 인수분해 하면 $(x-n)(x-2n)(x-6n)=0$이다.

따라서, $x=n$ 또는 $x=2n$ 또는 $x=6n$이다.

(2) 교점은 $(n,12n^2),(2n,6n^2),(6n,2n^2)$이며 두 점 $(n,12n^2),(6n,2n^2)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-2nx+14n^2$이다. 점 $(2n,6n^2)$에서 직선까지 거리는

$d=\dfrac{|2n(2n)+1(6n^2)-14n^2|}{\sqrt{(2n)^2+1^2}}=\dfrac{4n^2}{\sqrt{4n^2+1}}$, 두 점 $(n,12n^2),(6n,2n^2)$사이의 거리는 $h=5n\sqrt{1+4n^2}$이다. 그러므로 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이 $A_n=\dfrac{dh}{2}=10n^3$ 이다.

(3) 위의 결과로부터, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S_n은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \int_n^{6n}\left|x^2-9nx+20n^2-\frac{12n^3}{x}\right|dx \\
&= \int_n^{2n}\left(x^2-9nx+20n^2-\frac{12n^3}{x}\right)dx-\int_{2n}^{6n}\left(x^2-9nx+20n^2-\frac{12n^3}{x}\right)dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_n^{2n}-9n\left[\frac{x^2}{2}\right]_n^{2n}+20n^2\left[x\right]_n^{2n}-12n^3\left[\ln|x|\right]_n^{2n}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{2n}^{6n}+9n\left[\frac{x^2}{2}\right]_{2n}^{6n}-20n^2\left[x\right]_{2n}^{6n}+12n^3\left[\ln|x|\right]_{2n}^{6n} \\
&= \frac{7}{3}n^3-\frac{27}{2}n^3+20n^3-12n^3\ln 2-\frac{208}{3}n^3+144n^3-80n^3+12n^3\ln 3
\end{aligned}
$$

식을 정리 하면 $S_n=\frac{7}{2}n^3+12n^3\ln\frac{3}{2}=\left(\frac{7}{2}+12\ln\frac{3}{2}\right)n^3$이다.

(4) 제시문 **【다】**에 의하여

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n}S_kA_{2k} &= 10\left(\frac{7}{2}+12\ln\frac{3}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(\frac{2k}{2n}\right)^3\frac{2^3}{n} \\
&= 80\left(\frac{7}{2}+12\ln\frac{3}{2}\right)\int_0^1 x^6dx=\frac{80}{7}\left(\frac{7}{2}+12\ln\frac{3}{2}\right)=40+\frac{960}{7}\ln\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

이다.