단국대학교 2026학년도 수시 모집 논술고사

자연 계열 가이드 답안 (오전)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

〔논제 1〕 함수의 극솟값을 구할 수 있는지를 평가

〔논제 2〕 치환적분법과 부분적분법을 활용할 수 있는지를 평가

〔논제 3〕 삼각형의 무게중심과 도함수의 성질을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 황선욱 외(2025), 수학, 미래엔, 119쪽, 227-223쪽
○ 이준열 외(2025), 수학, 천재교육, 117쪽, 233-236쪽
○ 김원경 외(2025), 미적분, 비상교육, 126-127쪽, 131-132쪽

□ 문항해설

〔논제 1〕 함수의 극값의 성질을 이용하여 함수의 극솟값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제

〔논제 2〕 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제

〔논제 3〕 삼각형의 무게중심을 이해하고 함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제

□ 예시 답안

〔논제 1〕 $f'(x)=e^x(x-a)$이므로, $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다. 따라서

$$f(x)=\int_0^x te^t dt - a\int_0^x e^t dt = (x-1-a)e^x+1+a$$

에서 $f(a)=1+a-e^a=g(a)$이고, 극솟값 $1+a-e^a=3-e^a$이므로 $a=2$이다.

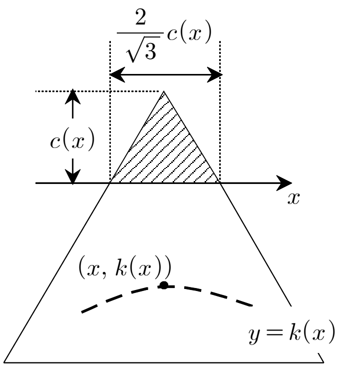
〔논제 2〕 $F'(x)=xe^x$이고, 〔논제 1〕에 의하여 $g(x)=1+x-e^x$, $g(2)=3-e^2=m$이다.

정적분 $\int_0^m F'(h(x))dx$의 값을 구하기 위해서 $x=g(u)$로 치환하면, $h(x)=u$이고,

$\frac{dx}{du}=g'(u)=(1-e^u)$이다. 또한 $x=0$일 때 $u=h(0)=0$이고, $x=m$일 때 $u=h(m)=2$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^m F'(h(x))dx=\int_0^2 F'(u)g'(u)du&=\int_0^2 ue^u(1-e^u)du\\&=\left[u\left(e^u-\frac{1}{2}e^{2u}\right)\right]_0^2-\int_0^2\left(e^u-\frac{1}{2}e^{2u}\right)du\\&=\frac{3}{4}+e^2-\frac{3}{4}e^4\end{aligned}$$

〔논제 3〕 정삼각형 T의 높이는 3이고, 무게중심에서 꼭짓점까지의 거리는 2이다. 따라서 정삼각형 T의 위쪽 꼭짓점의 좌표를 $(x, c(x))$라 하면, $c(x)=k(x)+2$이다. 정삼각형 T의 x축 위쪽에 위치하는 부분의 넓이 $A(x)$는 높이가 $c(x)$인 정삼각형의 넓이이므로



$$A(x)=\frac{c(x)^2}{\sqrt{3}}=\frac{\{k(x)+2\}^2}{\sqrt{3}}$$

이다. 한편 $A(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}(1+g(x))=\frac{\sqrt{3}}{3}(2+x-e^x)$이므로

$$\frac{\{k(x)+2\}^2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2+x-e^x)$$

정삼각형 T의 위쪽 꼭짓점이 x축 위에 있으므로 $c(x)=k(x)+2\geq 0$

$k(x)+2=\sqrt{2+x-e^x}$, $k(x)=-2+\sqrt{2+x-e^x}$ $(-1\leq x\leq 1)$

$k'(x)=\frac{1-e^x}{2\sqrt{2+x-e^x}}=0$으로부터 $k(x)$의 최댓값은 $x=0$에서 -1이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

〔논제 1〕 함수의 그래프의 개형과 일대일함수의 개념을 이해하는지를 평가

〔논제 2〕 함수의 극값을 찾을 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이준열 외(2025), 수학, 천재교육, 225-226쪽
○ 황선욱 외(2025), 미적분, 미래앤, 166-167쪽
○ 김원경 외(2025), 미적분, 비상교육, 147-149쪽

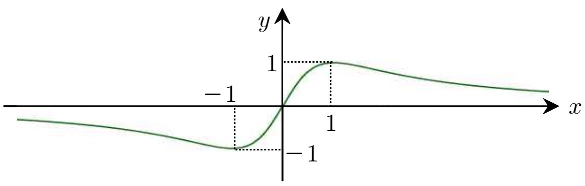
□ 문항해설

〔논제 1〕 함수의 그래프를 이용하여 일대일함수가 되는 구간을 파악할 수 있는지를 평가하는 문제

〔논제 2〕 함수의 극값을 찾고, 방정식의 해를 구하는 데 응용할 수 있는지를 평가하는 문제

□ 예시 답안

〔논제 1〕 함수 $f(x)$는 구간 $(-1,\,1)$에서 $f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}>0$이므로 증가하고, 또한 구간 $(-\infty,\,-1)$와 $(1,\,\infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다. 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



닫힌구간 $[b,\,c]$에서 함수 $f(x)$가 일대일함수이기 위해서는 구간 $[b,\,c]$가 다음의 세 가지 경우 중 하나를 만족하여야 한다.

(경우 1) $[b, c] \subset (-\infty, -1]$

(경우 2) $[b, c] \subset [1, \infty)$

(경우 3) $[b, c] \subset [-1, 1]$

(경우 1)은 $c \le -1$이므로 c가 양의 실수임에 위배된다.

(경우 2)에서 $b \ge 1$이므로, b가 음의 실수임에 위배된다.

(경우 3)에서 $a \in (-1, 1)$이면, 조건을 만족하는 음의 실수 b와 양의 실수 c가 존재한다. 만일 $a = -1$이면 $b < -1$이어야 하므로, $a \neq -1$이다. 마찬가지 이유로 $a \neq 1$이다.

따라서 a의 범위는 $(-1, 1)$이다.

〔논제 2〕

(i) $A(x)$ 구하기

실수 x의 구간을 $x < 0$, $0 \le x < 1$, $x \ge 1$인 경우로 나누어 각각의 경우에서 조건을 만족시키는 $A(x)$를 구한다.

(경우 1) $x < 0$: $0 \le f(t) \le 1$ 이므로

$$A(x) = \int_0^1 |f(t) - x|\,dt = \int_0^1 (f(t) - x)\,dt = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt - x = \ln 2 - x$$

(경우 2) $0 \le x < 1$: 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(t)$는 일대일함수이므로 역함수 $g(t)$가 존재한다.

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^1 |f(t) - x|\,dt = \int_0^{g(x)} (x - f(t))\,dt + \int_{g(x)}^1 (f(t) - x)\,dt \\ &= \ln 2 - 2\ln(1 + [g(x)]^2) - x + 2x\,g(x) \end{aligned}$$

(경우 3) $x \ge 1$: (경우 1)과 동일한 방법으로 $A(x) = x - \ln 2$

그러므로

$$A(x) = \begin{cases} \ln 2 - x & (x < 0) \\ \ln 2 - 2\ln(1 + [g(x)]^2) - x + 2x\,g(x) & (0 \le x < 1) \\ x - \ln 2 & (x \ge 1) \end{cases}$$

(ii) c 구하기

$x < 0$일 때 $A'(x) = -1$이고, $x \ge 1$일 때 $A'(x) = 1$이다.

$0 \le x < 1$일 때, $\dfrac{2g(x)}{1 + [g(x)]^2} = f(g(x)) = x$ 이므로

$$A'(x) = -2\frac{2g(x)}{1 + [g(x)]^2}[g(x)]' - 1 + 2g(x) + 2x[g(x)]' = 2g(x) - 1$$

$A'(x) = 0$에서 $g(x) = \dfrac{1}{2}$이므로 $x = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{5}$이다. $f'(x) > 0$이므로 $g'(x) > 0$이고,

$A''(x) = 2g'(x) > 0$이므로 $A(x)$는 $x = \dfrac{4}{5}$에서 극솟값을 갖는다. 따라서 $c = \dfrac{4}{5}$이다.

〔참고〕 $A'(0) = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{A(x) - A(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{A(x) - A(0)}{x} = -1$이고, 마찬가지 방법으로 $A'(1) = 1$이다.

(iii) $A(k)=\ln2$인 k 구하기 $(k>0)$

$A(x)$는 아래로 볼록하고 $A(0)=\ln2$, $A(1)=1-\ln2$이다.

- $0<x\le 1$에서 $A(x)=\ln2$를 만족하는 x는 존재하지 않는다.
- $x>1$에서 $A(x)=x-\ln2=\ln2$인 $x=2\ln2$이다.

따라서 $k=2\ln2$이다.