

계열문항

<가>

세 집합 X, Y, Z 에 대하여 두 함수

$$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$$

가 주어질 때, 집합 X 의 각 원소 x 에 대하여 $f(x)$ 는 집합 Y 의 원소이고, 집합 Y 의 원소 $f(x)$ 에 대하여 $g(f(x))$ 는 집합 Z 의 원소이다. 따라서 집합 X 의 각 원소 x 에 집합 Z 의 원소 $g(f(x))$ 를 대응시키면 X 를 정의역, Z 를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.

이 새로운 함수를 f 와 g 의 합성함수라 하며, 이것을 기호로

$$g \circ f: X \rightarrow Z$$

와 같이 나타낸다.

또 합성함수 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 에 대하여 x 에서의 함숫값을 기호로

$$(g \circ f)(x)$$

와 같이 나타낸다. 이때 X 의 임의의 원소 x 에 Z 의 원소 $g(f(x))$ 가 대응하므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

이다. 따라서 f 와 g 의 합성함수를

$$y = g(f(x))$$

와 같이 나타낼 수도 있다.

<나>

방정식 $f(x) = g(x)$ 의 실근은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

제시문 <가>와 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 이차함수 $f(x) = a(x+2)(x-3)$ 에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 실수 a 의 값을 구하시오. (단, $a > 0$)

1-2. 함수 $f(x) = a \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$)에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, 실수 a 의 범위를 구하시오. (단, $a > 0$)

계열 문항

<다>

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프와 직선 $y = mx + n$ 의 교점의 x 좌표는 방정식 $ax^2 + bx + c = mx + n$, 즉

$$ax^2 + (b-m)x + c-n = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

의 실근과 같다. 따라서 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프와 직선 $y = mx + n$ 의 위치 관계는 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식

$$D = (b-m)^2 - 4a(c-n)$$

의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

- (1) $D > 0$ 이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
- (2) $D = 0$ 이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
- (3) $D < 0$ 이면 만나지 않는다.

제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 두 이차함수 $y = x^2$ 과 $y = x^2 - x$ 의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.**2-2.** 두 이차함수 $y = -x^2 - 2$ 과 $y = x^2 - 2ax + a^2 + a$ 의 그래프에 동시에 접하는 직선이 두 개 존재하고 서로 수직으로 만날 때, 실수 a 의 값을 구하시오.

계열 문항

<라>

임의의 실수 a, b 를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

이다.

<마>

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 에 대하여 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ 일 때 $x = g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

제시문 <라>와 <마>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 함수 $f(x) = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^5 \cos(2\pi x)$ 에 대하여, 정적분

$$\int_0^1 f(x)dx$$

의 값을 구하시오.

3-2. 실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 상수 c 에 대하여

$$f(x) + f(c-x) = c$$

를 만족시킨다. $\int_0^c f(x)dx = 2$ 일 때, 상수 c 의 값을 모두 구하시오.

[숙명여자대학교 문항정보]

1. 일반 정보		
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2025학년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 합성, 방정식의 해, 접선, 정적분, 치환적분
예상 소요 시간	85 분 / 전체 100 분	

2. 문항 및 제시문

<가>
 세 집합 X, Y, Z 에 대하여 두 함수
 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$
 가 주어질 때, 집합 X 의 각 원소 x 에 대하여 $f(x)$ 는 집합 Y 의 원소이고, 집합 Y 의 원소 $f(x)$ 에 대하여 $g(f(x))$ 는 집합 Z 의 원소이다. 따라서 집합 X 의 각 원소 x 에 집합 Z 의 원소 $g(f(x))$ 를 대응시키면 X 를 정의역, Z 를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.
 이 새로운 함수를 f 와 g 의 합성함수라 하며, 이것을 기호로
 $g \circ f: X \rightarrow Z$
 와 같이 나타낸다.
 또 합성함수 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 에 대하여 x 에서의 함숫값을 기호로
 $(g \circ f)(x)$
 와 같이 나타낸다. 이때 X 의 임의의 원소 x 에 Z 의 원소 $g(f(x))$ 가 대응하므로
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
 이다. 따라서 f 와 g 의 합성함수를
 $y = g(f(x))$
 와 같이 나타낼 수도 있다.

<나>
 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 실근은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

제시문 <가>와 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 이차함수 $f(x) = a(x+2)(x-3)$ 에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 실수 a 의 값을 구하시오. (단, $a > 0$)

1-2. 함수 $f(x) = a \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$)에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, 실수 a 의 범위를 구하시오. (단, $a > 0$)

<다>

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프와 직선 $y = mx + n$ 의 교점의 x 좌표는 방정식 $ax^2 + bx + c = mx + n$, 즉

$$ax^2 + (b - m)x + c - n = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

의 실근과 같다. 따라서 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프와 직선 $y = mx + n$ 의 위치 관계는 이차 방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식

$$D = (b - m)^2 - 4a(c - n)$$

의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

- (1) $D > 0$ 이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
- (2) $D = 0$ 이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
- (3) $D < 0$ 이면 만나지 않는다.

제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 두 이차함수 $y = x^2$ 과 $y = x^2 - x$ 의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

2-2. 두 이차함수 $y = -x^2 - 2$ 과 $y = x^2 - 2ax + a^2 + a$ 의 그래프에 동시에 접하는 직선이 두 개 존재하고 서로 수직으로 만날 때, 실수 a 의 값을 구하시오.

<라>

임의의 실수 a, b 를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

이다.

<마>

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 에 대하여 $a = g(\alpha), b = g(\beta)$ 일 때 $x = g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

제시문 <라>와 <마>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 함수 $f(x) = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^5 \cos(2\pi x)$ 에 대하여, 정적분

$$\int_0^1 f(x)dx$$

의 값을 구하시오.

3-2. 실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 상수 c 에 대하여

$$f(x) + f(c - x) = c$$

를 만족시킨다. $\int_0^c f(x)dx = 2$ 일 때, 상수 c 의 값을 모두 구하시오.

3. 출제 의도

함수, 이차방정식, 함수의 미분과 적분, 도함수의 활용, 정적분, 합성함수 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문제들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문제들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 함수의 합성, 함수의 그래프, 접선의 방정식, 이차방정식, 연립방정식, 정적분, 치환적분법 등에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 <가>, <나>	[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-1	[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-2	[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
제시문 <다>	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.
문제 2-1	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

문제 2-2	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
제시문 <라>, <마>	[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 3-1	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문제 3-2	[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	김원경	비상교육	2020	63-66, 209-211
	고등학교 수학	황선욱	미래엔	2020	224-225
	고등학교 수학Ⅰ	권오남	교학사	2020	80-96
	고등학교 수학	류희찬	천재교과서	2018	64-69
	고등학교 수학Ⅱ	박교식	동아출판	2020	123-124
	고등학교 미적분	박교식	동아출판	2020	138
	고등학교 미적분	황선욱	미래엔	2020	75-80, 110-120

5. 문항 해설

제시문 <가>, <나>에서는 합성함수의 정의, 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 실근의 개수를 구하는 방법을 소개한다. <문제 1-1>에서는 이차함수의 합성을 이해하고, 합성함수의 정의를 이용해 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 실수 a 의 값을 구할 수 있는지를 평가한다. <문제 1-2>에서는 삼각함수의 합성을 정확히 이해하고, 합성함수의 정의를 이용해 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 실수 a 의 범위를 구할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>에서는 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계에 대하여 설명한다. <문제 2-1>에서는 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이용하여 주어진 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가한다. <문제 2-2>에서는 근과 계수와의 관계를 이용하여 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선이 서로 수직이 되는 a 의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <라>, <마>에서는 정적분과 치환적분법의 정의를 소개한다. <문제 3-1>에서는 치환적분을 활용하여 주어진 함수의 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가한다. <문제 3-2>에서는 주어진 함수의 성질을 활용하여 정적분 값에 대한 주어진 조건을 만족시키는 실수 c 를 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 문제 <1-1>, <1-2>

- ① <1-1>, <1-2>에서 합성함수의 의미를 정확히 이해한다.
- ② <1-1>에서 $f(f(x))=0$ 인 조건을 파악한다.
- ③ <1-1>에서 합성함수의 정의를 이용해 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 조건을 구한다.
- ④ <1-2>에서 $f(f(x))=0$ 인 조건을 파악한다.
- ⑤ <1-2>에서 삼각함수의 합성을 정확히 이해한다.
- ⑥ <1-2>에서 합성함수의 정의를 이용해 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건을 구한다.

- 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
- 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
- 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
- 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
- 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
- 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
- 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
- 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
- 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <2-1>, <2-2>

- ① <2-1>에서 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 정확히 이해한다.
- ② <2-1>에서 이차함수의 그래프와 직선이 접하는 조건을 이용하여 연립방정식을 세운다.
- ③ <2-1>에서 연립이차방정식을 풀어 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 바르게 구한다.
- ④ <2-2>에서 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하고 연립이차방정식을 구한다.
- ⑤ <2-2>에서 연립방정식을 풀어 동시에 접하는 직선이 두 개 존재함을 확인한다.
- ⑥ <2-2>에서 두 직선이 수직으로 만날 조건을 이용하여 a 의 값을 바르게 구한다.

- 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
- 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
- 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
- 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
- 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
- 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
- 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
- 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우

9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <3-1>, <3-2>

- ① <3-1>, <3-2>에서 치환적분법의 활용을 정확히 이해한다.
- ② <3-1>에서 삼각함수의 성질을 파악한다.
- ③ <3-1>에서 기함수의 정적분을 정확히 구한다.
- ④ <3-2>에서 $f(x)+f(c-x)=c$ 의 의미를 정확히 이해하고 활용한다.
- ⑤ <3-2>에서 치환적분법을 적용하여 정적분의 값을 구한다.
- ⑥ <3-2>에서 실수 c 의 값을 정확히 구한다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우

2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우

3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우

4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우

5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)

6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우

7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우

8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우

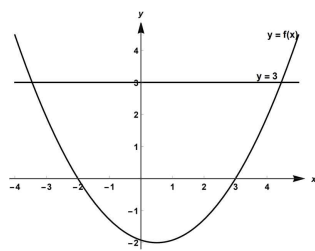
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

7. 예시 답안

■ 1-1

$a > 0$ 일 때 $f(f(x)) = 0$ 이기 위해서는, $f(x) = 3$ 또는 $f(x) = -2$ 이다.

또, $a > 0$ 이고 $f'(x) = a(2x - 1) = 0$ 이므로, $x = \frac{1}{2}$ 에서 $f(x)$ 는 최솟값을 가진다.



(1) $f(x) = 3$ 이면 $f(x) = a(x+2)(x-3) = 3$ 이다.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = a\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right) = -\frac{25}{4}a < 0$ 이므로 방정식 $f(x) = 3$ 은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $f(x) = -2$ 이면 $f(x) = a(x+2)(x-3) = -2$ 이다. $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이고, $f(x) = 3$ 은 항상 서로 다른 두 실근을 가지므로, 방정식 $f(x) = -2$ 는 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

그러기 위해서는 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{25}{4}a = -2$ 이어야 하므로 $a = \frac{8}{25}$ 이다.

따라서 $a = \frac{8}{25}$ 이다.

(별해) $f(x) = a(x+2)(x-3) = 3$ 을 정리하면 $ax^2 - ax - 6a - 3 = 0$ 이고 판별식은

$$D = a^2 + 4a(6a+3) = 25a^2 + 12a > 0$$

이므로 방정식 $f(x) = 3$ 은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(x) = a(x+2)(x-3) = -2$ 를 정리하면 $ax^2 - ax - 6a + 2 = 0$ 이다. 방정식 $f(x) = -2$ 는 오직 하나의 실근을 가져야 하므로 판별식은

$$D = a^2 + 4a(6a-2) = 25a^2 - 8a = 0$$

이다. 따라서 $a = \frac{8}{25}$ 이다.

■ 1-2

$a > 0$ 일 때 $f(f(x)) = 0$ 이기 위해서는, $f(x) = n\pi (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ 이다.

또, $a > 0$ 이고 $f'(x) = a \cos x = 0$ 이므로, $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 $f(x)$ 는 최댓값을 가진다.

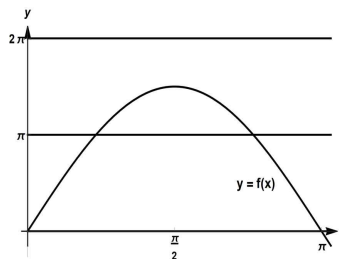
(1) 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근은 $x = 0$ 또는 $x = \pi$ 이다. 따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 방정식 $f(x) = \pi$ 가 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 조건은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \sin \frac{\pi}{2} = a > \pi$ 이다.

또한 방정식 $f(x) = \pi$ 는 $a = \pi$ 일 때 한 실근을 갖는다.

(3) 방정식 $f(x) = 2\pi$ 가 실근을 갖지 않을 조건은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \sin \frac{\pi}{2} = a < 2\pi$ 이다.

또한 방정식 $f(x) = 2\pi$ 는 $a = 2\pi$ 일 때 한 실근을 갖는다.



$a = \pi$ 일 때 서로 다른 세 실근을 갖고, $a = 2\pi$ 일 때는 서로 다른 다섯 실근을 갖는다. 따라서 서로 다른 네 실근을 갖기 위한 a 의 범위는 $\pi < a < 2\pi$ 이다.

■ 2-1

두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 하면, 두 이차방정식 $x^2 = mx + n$ 과 $x^2 - x = mx + n$ 은 각각 중근을 갖는다. 따라서 판별식을 이용하면

$$m^2 + 4n = 0$$

$$(m+1)^2 + 4n = 0$$

이다. 이 연립방정식을 풀면 $m = -\frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{16}$ 이다. 따라서 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직

선의 방정식은 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$ 이다.

■ 2-2

두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 하면, 두 이차방정식 $-x^2 - 2 = mx + n$ 과 $x^2 - 2ax + a^2 + a = mx + n$ 은 각각 중근을 갖는다. 따라서 판별식을 이용하면

$$m^2 - 4(n + 2) = 0$$

$$(m + 2a)^2 - 4(-n + a^2 + a) = 0$$

이다. 두 식을 더하여 n 을 소거하면

$$m^2 + (m + 2a)^2 - 4(a^2 + a + 2) = 2m^2 + 4am - 4a - 8 = 0$$

즉,

$$m^2 + 2am - 2a - 4 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 방정식 ①의 판별식은 $\frac{D}{4} = a^2 + 2a + 4 = (a + 1)^2 + 3 > 0$ 이므로 모든 실수 a 에 대하여 서로 다른 두 실근을 갖는다. n 의 값은 m 에 의하여 결정되므로 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선이 두 개 존재한다. 방정식 ①의 두 근이 각각 두 직선의 기울기이므로, 두 직선이 서로 수직으로 만난다면 두 근의 곱이 -1 이다. 따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$$-2a - 4 = -1$$

이고, 따라서 $a = -\frac{3}{2}$ 이다.

■ 3-1

정적분

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^5 \cos(2\pi x) \right\} dx$$

에서 $x - \frac{1}{2} = t$ 로 놓으면 $\frac{dx}{dt} = 1$ 이고 $0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^5 \cos(2\pi x) \right\} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} + t^5 \cos\left(2\pi\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) \right\} dt$$

$$= \frac{1}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^5 \cos(2\pi t) dt$$

이다. $g(t) = t^5 \cos(2\pi t)$ 라 하면 $g(-t) = -g(t)$ 이므로

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^5 \cos(2\pi t) dt = 0$$

이다. 따라서

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

이다.

■ 3-2

함수 $f(x)$ 의 성질에 의하여

$$\int_0^c \{f(x) + f(c - x)\} dx = c^2 \dots\dots \textcircled{2}$$

이다. $c - x = t$ 라 하면 $\frac{dx}{dt} = -1$ 이고 $c - 0 = c$, $c - c = 0$ 이므로

$$\int_0^c f(c-x)dx = \int_0^c f(t)dt$$

이다. ②에서 정적분의 성질을 이용하면

$$\int_0^c \{f(x) + f(c-x)\}dx = \int_0^c f(x)dx + \int_0^c f(c-x)dx = 2 \int_0^c f(t)dt = c^2$$

이므로

$$\int_0^c f(x)dx = \frac{1}{2}c^2$$

이다. 따라서

$$\int_0^c f(x)dx = 2$$

를 만족시키는 실수 c 의 값은 $c = \pm 2$ 이다.