2025학년도
숙명여자대학교
대학별고사
문항카드

- 논술(자연_약학) -

2-6. 문항카드 ⑥ <자연계열(약학부) 1, 2, 3번 문항>

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2025학년도 수시모집 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(약학부) / 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	최대, 최소, 극한, 적분, 사잇값 정리, 수학적 귀납법
예상 소요 시간	90분 / 전체 100분	

2. 문항 및 자료

<가>

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

<나>

함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면, 최대·최소 정리에 따라 함수 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 이때 이 구간에서 $f(x)$의 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이 된다.

제시문 <가>, <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 이차방정식 $x^2-(e^k-2)x-2e^k+1=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$이 최소가 되는 실수 k의 값과 그때 $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하시오.

1-2. 삼차함수 $f(x)=(x^2-1)(x+3k)$의 극댓값과 극솟값의 합이 최대가 되는 실수 k의 값과 그때 극댓값과 극솟값의 합을 구하시오. (단, $-\sqrt{3}\le k\le\sqrt{3}$)

<다>
명제 $p \to q$가 참이면 그 대우 $\sim q \to \ \sim p$도 참이므로 어떤 명제가 참임을 증명할 때에는 그 대우가 참임을 증명해도 된다.

<라>
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.
이것을 사잇값의 정리라고 한다.
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 a와 b 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다.

제시문 <다>, <라>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. **함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(a)>0$, $f(b)>0$이다.**
다음 명제의 대우를 말하고 그것이 참임을 증명하시오.

방정식 $f(x)=0$이 열린구간 (a,b)에서 실근을 갖지 않는다면 열린구간 (a,b)의 모든 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

2-2. **양수 k에 대하여 삼차방정식 $x^3-2x=k$가 닫힌구간 $[-k,k]$에서 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구하시오.**

<마>

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 A는

$$A=\int_a^b |f(x)|dx$$

<바>

함수 $f(x)$가 임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

<사>

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

<아>

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명할 때, 다음 두 가지를 증명하면 된다.

(i) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

자연수에 대한 어떤 명제가 참임을 증명하는 이와 같은 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

제시문 <마>, <바>, <사>, <아>를 읽고, 다음 조건을 만족시키는 a_n에 대하여 문제에 답하시오.

자연수 n에 대하여 $a_1=1$이고 $a_n<a_{n+1}$이다. 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{e^2-1}e^{x^2}$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a_n$, $x=a_{n+1}$로 둘러싸인 도형의 넓이 A_n이 $A_n=e^{2n-1}$이다.

3-1. **x축, y축에 모두 접하고 중심이 점 (a_n, a_n)인 원이 직선 $y=\left(\tan\frac{1}{n}\right)x$와 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이를 l_n이라 할 때 $\lim\limits_{n\to\infty} l_n^2$의 값을 구하시오.**

3-2. **모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.**

$$\sum_{m=1}^{n^2}\frac{1}{a_m}\geq n$$

3. 출제 의도

명제, 함수, 방정식, 미분과 적분 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문제들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문제들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 함수의 최대 최소, 이차방정식, 연속함수의 성질, 정적분, 삼각함수, 수열, 수열의 극한, 방정식의 근, 수학적 귀납법 등에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 <가>, <나>	[10수학01-01]다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-08]이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 1-1	[10수학01-01]다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-08]이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ02-08]함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문제 1-2	[10수학01-01]다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-08]이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08]함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 <다>, <라>	[10수학03-05]명제의 역과 대우를 이해한다. [10수학03-07]대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. [12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-1	[10수학03-05]명제의 역과 대우를 이해한다. [10수학03-07]대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. [12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-2	[12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09]함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
제시문 <마>, <바>, <사>, <아>	[10수학02-05]점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-03]정적분의 뜻을 안다. [12미적03-05]곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 3-1	[10수학02-05]점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [12수학Ⅰ02-02]삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅰ03-03]등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12미적02-04]삼각함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적03-05]곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 3-2	[12수학Ⅰ03-04]Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-08]수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	고성은	좋은책신사고	2020	11-16, 51-54, 126-128, 190-194
	고등학교 수학I	김원경	비상교육	2020	71-88, 127-133, 139-150
	고등학교 수학II	이준열	천재교육	2020	35-40, 83-97, 121-127
	고등학교 미적분	황선욱	미래엔	2020	71-74, 166-167

5. 문항 해설

제시문 <가>, <나>에서는 이차방정식의 근과 계수의 관계와 닫힌구간에서 연속인 함수의 최댓값, 최솟값에 대해서 소개한다. <문제 1-1>에서는 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.<문제 1-2>에서는 극댓값과 극솟값의 합의 최댓값을 구할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>, <라>에서는 사잇값의 정리와 대우를 이용한 명제의 증명에 대해서 소개한다. <문제 2-1>에서는 주어진 명제의 대우를 말하고 그 명제가 참임을 증명할 수 있는지를 평가한다. <문제 2-2>에서는 사잇값의 정리를 활용하여 방정식이 실근을 가지는 구간을 구할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <마>, <바>, <사>, <아>에서는 정적분의 성질과 정적분을 활용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법과 점과 직선 사이의 거리를 소개한다. <문제 3-1>에서는 정적분의 성질을 이용하여 주어진 값을 구하고, 삼각함수의 극한을 이용하여 주어진 값의 극한을 구할 수 있는지를 평가한다. <문제 3-2>에서는 수학적 귀납법을 이용하여 부등식이 성립함을 증명할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1 1-2	① <1-1>, <1-2>에서 근과 계수의 관계를 정확히 이해한다. ② <1-1>에서 곱셈 공식을 활용할 수 있다. ③ <1-1>에서 $\alpha^3+\beta^3$의 최솟값과 실수 k의 값을 구할 수 있다. ④ <1-2>에서 도함수의 근과 계수의 관계를 활용할 수 있다. ⑤ <1-2>에서 곱셈 공식을 활용할 수 있다. ⑥ <1-2>에서 최댓값을 구할 수 있다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	

2-1 2-2	① <2-1>에서 명제의 대우를 바르게 말할 수 있다. ② <2-1>에서 명제의 가정을 두 가지 경우로 나누어 설명할 수 있다. ③ <2-1>에서 사잇값의 정리를 활용하여 명제가 참임을 증명할 수 있다. ④ <2-2>에서 함수의 그래프의 개형을 파악한다. ⑤ <2-2>에서 k의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 설명할 수 있다. ⑥ <2-2>에서 사잇값의 정리를 활용하여 실근을 갖는 k의 값의 범위를 구할 수 있다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	
3-1 3-2	① <3-1>에서 정적분의 성질을 이용하여 a_n을 구할 수 있다. ② <3-1>에서 선분의 길이 l_n을 구할 수 있다. ③ <3-1>에서 삼각함수의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있다. ④ <3-2>에서 주어진 부등식을 이해할 수 있다. ⑤ <3-2>에서 $n=k$에서 $n=k+1$이 되는 과정을 설명할 수 있다. ⑥ <3-2>에서 수학적 귀납법을 이용하여 부등식을 증명할 수 있다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	

7. 예시 답안

■ 1-1

주어진 이차방정식의 판별식

$$D=e^{2k}-4e^k+4+8e^k-4=e^{2k}+4e^k>0$$

이므로 이차방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 가진다. 또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha+\beta=e^k-2,\ \alpha\beta=1-2e^k$$

이다. 따라서

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(e^k-2)^3-3(1-2e^k)(e^k-2) \qquad \text{......} ①$$

이다. 이때 $t=e^k\ (t>0)$라고 두고, $f(t)=(t-2)^3-3(1-2t)(t-2)$라 하자.

$$f'(t)=3(t-2)^2+6(t-2)-3(1-2t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$$

이므로 $f'(t)=0$에서 $t=\pm1$이다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$

따라서 $t=1$, 즉 $k=0$일 때, $\alpha^3+\beta^3$의 최솟값은 $f(1)=-4$이다.

(별해) ①로부터 $g(k)=(e^k-2)^3-3(1-2e^k)(e^k-2)$라 하면,
$g'(k)=e^k\{3(e^k-2)^2+6(e^k-2)-3(1-2e^k)\}=3e^k(e^k+1)(e^k-1)=0$
이므로 $g'(k)=0$에서 $k=0$이다.

k	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(k)$	$-$	0	$+$
$g(k)$	↘	-4	↗

따라서 $k=0$일 때, $\alpha^3+\beta^3$의 최솟값은 $g(0)=-4$이다.

■ 1-2

도함수 $f'(x)=2x(x+3k)+x^2-1=3x^2+6kx-1$이다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식

$$D/4=9k^2+3>0$$

이므로 $f'(x)=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 가진다.
$f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 $f'(x)=0$의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha+\beta=-2k,\ \alpha\beta=-\frac{1}{3}$$

이다. 따라서

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4k^2+\frac{2}{3},$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-8k^3-2k$$

삼차함수 $f(x)$의 삼차항의 계수가 1로 양수이고 $\alpha<\beta$이므로 $f(\alpha)$는 극댓값, $f(\beta)$는 극솟값이다.
따라서

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta)&=\alpha^3+\beta^3+3k(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)-6k \\ &=-8k^3-2k+12k^3+2k+2k-6k \\ &=4k^3-4k \end{aligned}$$

여기서 $g(k)=4k^3-4k$라고 하면, $g'(k)=4(3k^2-1)$이므로 $g'(k)=0$에서 $k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

k	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$g'(k)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(k)$	$-8\sqrt{3}$	↗	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{8\sqrt{3}}{9}$	↗	$8\sqrt{3}$

따라서 $k=\sqrt{3}$일 때 $f(\alpha)+f(\beta)$를 최대로 하고 최댓값은 $g(\sqrt{3})=8\sqrt{3}$ 이다.

■ 2-1

주어진 명제의 대우는
'열린구간 (a,b)의 어떤 x에 대하여 $f(x)\le 0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a,b)에서 실근을 갖는다.'
이다.
조건에 의하여 $f(c)\le 0$인 실수 c가 a와 b 사이에 존재한다.
만약 $f(c)=0$이면 $x=c$는 방정식 $f(x)=0$의 근이다.
만약 $f(c)<0$이면 $f(a)>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 a와 c 사이에 적어도 하나의 실근을 갖고, 또한 $f(b)>0$이므로 c와 b 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a,b)에서 실근을 갖는다.

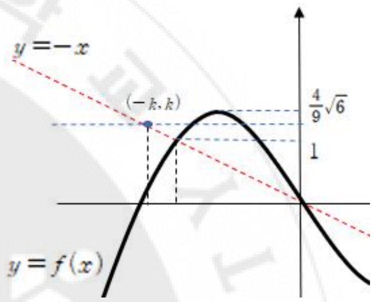
■ 2-2

$f(x)=x^3-2x$라 하면 방정식 $f(x)=k$의 근은 곡선 $y=f(x)$와 $y=k$의 교점의 x좌표이다.

$f'(x)=3x^2-2$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이다.

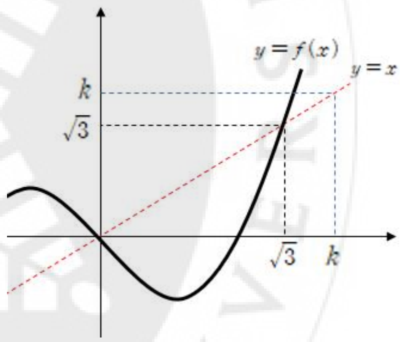
x		$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$		$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$	↘	$-\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$	↗

$0<k\le 1$인 경우에는 $f(-k)-k=-k^3+k=k(1-k^2)>0$이므로 $f(-k)\ge k$이다. $f(0)=0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(x)=k$는 구간 $[-k,0]$에서 실근을 갖는다.



$1<k\le\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$인 경우에는 $f\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{4}{9}\sqrt{6}>k$이므로 $f(x)=k$는 구간 $[-\dfrac{\sqrt{6}}{3},0]$에서 실근을 갖는다. 또 $-k<-1<-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이므로 $f(x)=k$는 구간 $[-k,0]$에서 실근을 갖는다.

한편, $k>\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$인 경우에는 방정식 $f(x)=k$는 $x<\sqrt{2}$인 근을 갖지 않는다. 따라서 방정식 $f(x)=k$가 닫힌구간 $[\sqrt{2},k]$에서 실근을 가져야 한다. 함수 $f(x)$는 $[\sqrt{2},k]$에서 증가하고 $f(\sqrt{2})=0$이므로 $f(k)\ge k$가 되어야 한다. 이 부등식을 풀면 $k^3-3k\ge 0$이므로 $k\ge\sqrt{3}$이다.



모든 경우를 고려하면 구하는 k의 값의 범위는 $0<k\le\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$ 또는 $k\ge\sqrt{3}$이다.

■ 3-1

함수 $f(x)$의 a_1부터 a_n까지의 정적분은

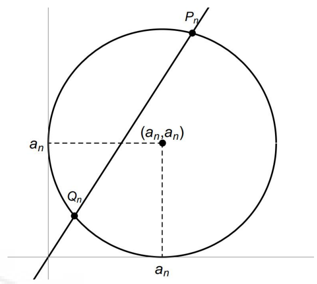
$$\int_{a_1}^{a_n}\frac{2x}{e^2-1}e^{x^2}dx=\int_{a_1}^{a_2}\frac{2x}{e^2-1}e^{x^2}dx+\int_{a_2}^{a_3}\frac{2x}{e^2-1}e^{x^2}dx+\cdots+\int_{a_{n-1}}^{a_n}\frac{2x}{e^2-1}e^{x^2}dx=e+e^3+\cdots+e^{2n-3}$$

$$\frac{1}{e^2-1}\left(e^{a_n^2}-e\right)=\sum_{k=1}^{n-1}e^{2k-1}=\frac{1}{e^2-1}\left(e^{2n-1}-e\right)$$

따라서 $a_n^2=2n-1$, 즉 $a_n=\sqrt{2n-1}$이다.

점 (a_n,a_n)과 직선 $\left(\tan\dfrac{1}{n}\right)x-y=0$ 사이의 거리를 d_n으로 놓으면

$$d_n = \frac{\left|\left(\tan\frac{1}{n}\right)a_n - a_n\right|}{\sqrt{\tan^2\frac{1}{n}+1}}$$



이다. 한편 $l_n = 2\sqrt{a_n^2 - d_n^2}$ 이므로,

$$l_n^2 = 4\left(a_n^2 - d_n^2\right) = 4\left(a_n^2 - \frac{a_n^2\left(\tan\frac{1}{n}-1\right)^2}{1+\tan^2\frac{1}{n}}\right)$$

이다. 이때 삼각함수의 성질에 의하여 $1+\tan^2\frac{1}{n} = \sec^2\frac{1}{n}$ 이므로

$$4\left(a_n^2 - \frac{a_n^2\left(\tan\frac{1}{n}-1\right)^2}{1+\tan^2\frac{1}{n}}\right) = 4a_n^2\left(1 - \frac{\left(\tan\frac{1}{n}-1\right)^2}{\sec^2\frac{1}{n}}\right) = 8a_n^2\left(\frac{\tan\frac{1}{n}}{\sec^2\frac{1}{n}}\right) = 8a_n^2\left(\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right)$$

이다. 또한 $a_n = \sqrt{2n-1}$ 이므로

$$l_n^2 = 8(2n-1)\left(\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right)$$

이다. 이때, $t = \frac{1}{n}$이라 하면, $n \to \infty$ 일 때, $t \to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} l_n^2 = \lim_{n\to\infty} 8(2n-1)\left(\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{t\to 0} 8\left(\frac{2}{t}-1\right)(\sin t\cos t)$$
$$= \lim_{t\to 0} 8(2-t)\frac{\sin t}{t}\cos t = 16$$

이다.

■ 3-2

$a_n = \sqrt{2n-1}$ 이므로 주어진 부등식은

$$\sum_{m=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \geq n \qquad \text{......} ②$$

이다.

$n=1$일 때 $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq 1$ 이므로 ②가 성립한다.

$n=k$일 때 부등식 $\sum_{m=1}^{k^2} \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \geq k$가 성립한다고 가정하자.

위 부등식의 양변에 $\frac{1}{\sqrt{2k^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}}$ 을 더하면

$$\sum_{m=1}^{k^2} \frac{1}{\sqrt{2m-1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}}$$
$$\geq k + \frac{1}{\sqrt{2k^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}}$$

여기에서,

$$\sum_{m=1}^{k^2} \frac{1}{\sqrt{2m-1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}} = \sum_{m=1}^{(k+1)^2} \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \quad \text{이고}$$

$\frac{1}{\sqrt{2k^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2k^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}}$ 의 항의 개수는 $2k+1$이므로

$$\sum_{m=1}^{(k+1)^2}\frac{1}{a_m} \geq k+\frac{2k+1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}}=k+\sqrt{\frac{4k^2+4k+1}{2k^2+4k+1}}=k+\sqrt{1+\frac{2k^2}{2k^2+4k+1}}\geq k+1$$

이므로 $n=k+1$일 때도 ②가 성립한다. 따라서 모든 자연수 n에서 주어진 부등식이 성립한다.

2025학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수 답안
- 자 연 계 열 (약 학 부) 문 항 -

■ 1-1

방정식 $f(f(x))=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3일 조건을 구해보자.
$f(f(x))$ 는 합성함수이므로 방정식 $a(f(x)+2)(f(x)-3)=0$ 를 만족하는 근을 찾아야 한다.
이 방정식을 계산하면 $a\neq 0$이므로 $f(x)=-2$ 또는 $f(x)=3$.
조건 <나>에 의해 '$f(x)=-2$또는$f(x)=3$' 의
실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=-2$
또는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=3$의
교점의 x좌표와 같다.
두 쌍의 함수의 교점의 x좌표가 총 3개이고
$a>0$인 상황을 그래프로 그려보자.

이다.

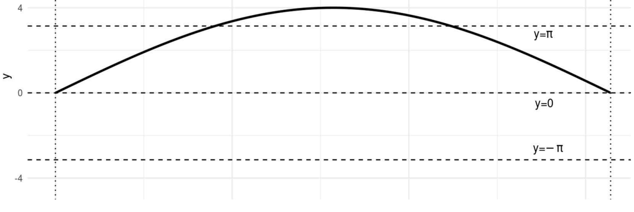
따라서 이차함수 $y=f(x)$의 꼭짓점은 $y=-2$위에 존재한다.

$f(x)=a(x-\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}a$ 이므로

$-\frac{25}{4}a=-2$ $\qquad a=\frac{8}{25}$ 이다. $\quad \therefore a=\frac{8}{25}$

■ 1-2

방정식 $f(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 조건을 구해보자.
$f(f(x))$는 합성함수이므로 방정식 $a\sin(f(x))=0$을 만족하는 근을 찾아야 한다.
이 방정식을 계산하면 $a\neq 0$이므로 $f(x)=n\pi$ (n은 모든 정수).
조건 <나>에 의해 $f(x)=n\pi$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=n\pi$의 교점의 x좌표와 같다.
서로 다른 교점의 x좌표가 4개인 두 함수를 $a>0$와 $0\leq x\leq \pi$를 고려하여 그래프로 그려보자.



따라서 $y=f(x)$와 $y=n\pi$는 $y=0$과 $y=\pi$ 위에서 각각 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
$\pi<(y=f(x)$의 최댓값$)<2\pi$이므로 $\pi<a<2\pi$이다. $\qquad \therefore \pi<a<2\pi$

2025학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수 답안
- 자 연 계 열 (약 학 부) 문 항 -

■ 2-1

함수 $y=-x^2-2$ 위에 있는 점 $(t,-t^2-2)$에서의 접선을 구해보면 다음과 같다. (단, t는 실수이다.)

$y=-2t(x-t)-t^2-2$

즉, $y=-2tx+t^2-2\cdots$ ㉠

그런데 접선 ㉠이 함수 $y=x^2-2ax+a^2+a$ 와도 접해야 하므로

$x^2-2ax+a^2+a=-2tx+t^2-2$

즉, 제시문 <다>에 의거하여

$x^2-2(a-t)x+a^2+a-t^2+2=0$의 판별식 D가 0이다.

$\frac{D}{4}=(a-t)^2-(a^2+a-t^2+2)=0$
$a^2-2at+t^2-a^2-a+t^2-2=0$
$2t^2-2at-(a+2)=0$
$(2t-a-2)(t+1)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{a+2}{2}$

따라서 두 이차함수 $y=-x^2-2$와 $y=x^2-2ax+a^2+a$의 그래프를 동시에 접하는 직선은 (i), (ii) 이다.

i) $y=2x-1$

ii) $y=-(a+2)x+(\frac{a+2}{2})^2-2$

그런데 직선 (i)과 (ii)는 수직이므로 두 기울기의 곱이 -1이어야 한다.

$-2(a+2)=-1 \qquad \therefore a=-\frac{3}{2}$

■ 2-2

먼저, 두 함수 $y=x^2$과 $y=ax^2-ax$의 그래프의 교점의 개수를 구해보자.

$x^2=ax^2-ax$

$x(a-1)x-a=0$이므로

두 그래프의 교점의 개수 $=\begin{cases}1 & (a=1)\\ 2 & (a\neq 1\end{cases}$ 이다.

함수 $y=x^2$ 위의 점 (t,t^2)에서의 접선을 구해보면, (단, t는 실수)

$y=2tx-t^2\cdots$ ㉠

그러므로 함수 $y=ax^2-ax$와 접선 ㉠의 교점개수가 1이 되도록 하는 t의 개수가 두 그래프의 교점의 개수이다.

$ax^2-ax=2tx-t^2$
$ax^2-(a+2t)x+t^2=0$

제시문 <다>에 의거하여 한점에서 만나려면 $D=0$이어야 한다.

$D=(a+2t)^2-4at^2=0$
$a^2+4at+4t^2-4at^2=0$
$(4-4a)t^2+4at+a^2=0\cdots$ ㉡

(i) $a=1$일 때,

$4-4a=0$이 되므로 $4at+a^2=0, t=-\frac{a}{4}$

즉, t의 값은 1개이므로 두 그래프를 동시에 접하는 직선은 1개이다.

(ii) $a \neq 1$일 때,

㉡을 만족하는 t의 값의 개수를 구하기 위해 판별식을 사용하면,

$\frac{D}{4}=4a^2-a^2(4-4a^2)=4a^3$이므로

$a>0, a \neq 1$의 모든 a에서 $D>0$이므로 t의 값은 2개이다.

따라서, 두 그래프를 동시에 접하는 직선은 2개이다.

결국, 종합해보면

$a=1$일 때 동시에 접하는 직선의 개수와 교점의 개수는 모두 1개,

$a \neq 1$일 때, 동시에 접하는 직선의 개수와 교점의 개수는 모두 2개로,

그래프에 동시에 접하는 직선의 개수와 두 그래프의 교점의 개수는 같다.

2025학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수 답안
- 자 연 계 열 (약 학 부) 문 항 -

■ 3-1

$\int_0^c f(x)dx=2$

$f(x)+f(c-x)=c$이므로

$\int_0^c f(x)dx+\int_0^c f(c-x)dx=\int_0^c cdx$

$2+\int_0^c f(c-x)dx=[cx]_0^c$

$c-x=t$로 치환하자

$-1=\dfrac{dt}{dx}$

$2+\int_0^c -f(t)dt=c2$

$2+\int_0^c f(t)dt=c^2$

$2+2=c^2$
$c=2,\ -2$

■ 3-2

$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(x))dx=\int_{\frac{3c}{4}}^{\frac{c}{4}} f(f(c-x))\times(-1)dx\ (\because\ <\text{마}>)$

$\int_{\frac{3c}{4}}^{\frac{c}{4}} f(f(c-x))\times(-1)dx=\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(c-x)dx$

$f(x)+f(c-x)=c$ 이므로

$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(c-x))dx=\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(c-f(x))dx$ 이다.

$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(x))dx=\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(c-f(x))dx=A$라 하자.

$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(x))dx+\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(c-f(x))dx$에서

$f(x)+f(c-x)=c$ 이므로

$f(f(x))+f(c-f(x))=c$임을 이용하면

$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} cdx=[cx]_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}}$

$=\dfrac{3}{4}c^2-\dfrac{1}{4}c^2=\dfrac{1}{2}c^2$

$2A=\dfrac{1}{2}c^2$이므로

$A=\dfrac{1}{4}c^2$