## 계 열 문 항

<가>
세 집합 $X$, $Y$, $Z$에 대하여 두 함수

$$f: X \to Y,\ g: Y \to Z$$

가 주어질 때, 집합 $X$의 각 원소 $x$에 대하여 $f(x)$는 집합 $Y$의 원소이고, 집합 $Y$의 원소 $f(x)$에 대하여 $g(f(x))$는 집합 $Z$의 원소이다. 따라서 집합 $X$의 각 원소 $x$에 집합 $Z$의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 $X$를 정의역, $Z$를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.
이 새로운 함수를 $f$와 $g$의 합성함수라 하며, 이것을 기호로

$$g \circ f: X \to Z$$

와 같이 나타낸다.
또 합성함수 $g \circ f: X \to Z$에 대하여 $x$에서의 함숫값을 기호로

$$(g \circ f)(x)$$

와 같이 나타낸다. 이때 $X$의 임의의 원소 $x$에 $Z$의 원소 $g(f(x))$가 대응하므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

이다. 따라서 $f$와 $g$의 합성함수를

$$y = g(f(x))$$

와 같이 나타낼 수도 있다.

<나>
방정식 $f(x) = g(x)$의 실근은 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프의 교점의 개수를 조사하여 구할 수 있다.

제시문 <가>와 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

**1-1.** 이차함수 $f(x) = a(x+2)(x-3)$에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 실수 $a$의 값을 구하시오. (단, $a > 0$)

**1-2.** 함수 $f(x) = a\sin x\ (0 \le x \le \pi)$에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, 실수 $a$의 범위를 구하시오. (단, $a > 0$)

## 계 열 문 항

<다>

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프와 직선 $y = mx + n$의 교점의 $x$좌표는 방정식
$ax^2 + bx + c = mx + n$, 즉

$$ax^2 + (b-m)x + c - n = 0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

의 실근과 같다. 따라서 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프와 직선 $y = mx + n$의 위치 관계는 이차방정식 ①의 판별식

$$D = (b-m)^2 - 4a(c-n)$$

의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

(1) $D > 0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) $D = 0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
(3) $D < 0$이면 만나지 않는다.

제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

**2-1.** 두 이차함수 $y = -x^2 - 2$과 $y = x^2 - 2ax + a^2 + a$의 그래프에 동시에 접하는 직선이 두 개 존재하고 서로 수직으로 만날 때, 실수 $a$의 값을 구하시오.

**2-2.** 두 이차함수 $y = x^2$과 $y = ax^2 - ax\ (a > 0)$의 그래프에 동시에 접하는 직선의 개수와 두 이차함수의 그래프의 교점의 개수는 서로 같음을 보이시오.

## 계 열 문 항

<라>

임의의 실수 $a$, $b$를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

이다.

<마>

닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$와 미분가능한 함수 $x = g(t)$에 대하여 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$일 때 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $\alpha$, $\beta$를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

제시문 <라>와 <마>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

**3-1.** 실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$가 상수 $c$에 대하여

$$f(x) + f(c-x) = c$$

를 만족시킨다. $\int_0^c f(x)dx = 2$일 때, 상수 $c$의 값을 모두 구하시오.

**3-2.** 실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$가 상수 $c$에 대하여

$$f(x) + f(c-x) = c$$

를 만족시킨다. 정적분

$$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(x))dx$$

의 값을 구하시오.

# [숙명여자대학교 문항정보]

## 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사 | |
| 전형명 | 2025학년도 모의논술 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연계열(약학부) / 문항 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학, 수학I, 수학II, 미적분 |
| | 핵심개념 및 용어 | 함수의 합성. 방정식의 해. 접선. 정적분. 치환적분 |
| 예상 소요 시간 | 85 분 / 전체 100 분 | |

## 2. 문항 및 제시문

<가>

세 집합 $X$, $Y$, $Z$에 대하여 두 함수

$$f : X \to Y,\ g : Y \to Z$$

가 주어질 때, 집합 $X$의 각 원소 $x$에 대하여 $f(x)$는 집합 $Y$의 원소이고, 집합 $Y$의 원소 $f(x)$에 대하여 $g(f(x))$는 집합 $Z$의 원소이다. 따라서 집합 $X$의 각 원소 $x$에 집합 $Z$의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 $X$를 정의역, $Z$를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.

이 새로운 함수를 $f$와 $g$의 합성함수라 하며, 이것을 기호로

$$g \circ f : X \to Z$$

와 같이 나타낸다.

또 합성함수 $g \circ f : X \to Z$에 대하여 $x$에서의 함숫값을 기호로

$$(g \circ f)(x)$$

와 같이 나타낸다. 이때 $X$의 임의의 원소 $x$에 $Z$의 원소 $g(f(x))$가 대응하므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

이다. 따라서 $f$와 $g$의 합성함수를

$$y = g(f(x))$$

와 같이 나타낼 수도 있다.

<나>

방정식 $f(x) = g(x)$의 실근은 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프의 교점의 개수를 조사하여 구할 수 있다.

제시문 <가>와 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

**1-1.** 이차함수 $f(x) = a(x+2)(x-3)$에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 실수 $a$의 값을 구하시오. (단, $a > 0$)

**1-2.** 함수 $f(x)=a\sin x\,(0 \le x \le \pi)$에 대하여 방정식 $f(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, 실수 $a$의 범위를 구하시오. (단, $a>0$)

<다>

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 $x$좌표는 방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉

$$ax^2+(b-m)x+c-n=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

의 실근과 같다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 ①의 판별식

$$D=(b-m)^2-4a(c-n)$$

의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
(3) $D<0$이면 만나지 않는다.

제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

**2-1.** 두 이차함수 $y=-x^2-2$과 $y=x^2-2ax+a^2+a$의 그래프에 동시에 접하는 직선이 두 개 존재하고 서로 수직으로 만날 때, 실수 $a$의 값을 구하시오.

**2-2.** 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=ax^2-ax\,(a>0)$의 그래프에 동시에 접하는 직선의 개수와 두 이차함수의 그래프의 교점의 개수는 서로 같음을 보이시오.

<라>

임의의 실수 $a$, $b$를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

이다.

<마>

닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$와 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $\alpha$, $\beta$를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

제시문 <라>와 <마>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

**3-1.** 실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$가 상수 $c$에 대하여

$$f(x)+f(c-x)=c$$

를 만족시킨다. $\int_0^c f(x)dx = 2$일 때, 상수 $c$의 값을 모두 구하시오.

**3-2.** 실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$가 상수 $c$에 대하여

$$f(x)+f(c-x)=c$$

를 만족시킨다. 정적분

$$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(x))dx$$

의 값을 구하시오.

## 3. 출제 의도

함수, 이차방정식, 함수의 미분과 적분, 도함수의 활용, 정적분, 합성함수 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문제들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문제들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 함수의 합성, 함수의 그래프, 접선의 방정식, 이차방정식, 연립방정식, 정적분, 치환적분법 등에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

## 4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정 |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취 기준 |
| 제시문 <가>, <나> | [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.<br>[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.<br>[12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. |
| 문제 1-1 | [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.<br>[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.<br>[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.<br>[12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. |
| 문제 1-2 | [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.<br>[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.<br>[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.<br>[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.<br>[12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. |

| | |
|---|---|
| 제시문 <다> | [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.<br>[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. |
| 문제 2-1 | [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.<br>[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.<br>[10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다. |
| 문제 2-2 | [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.<br>[10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.<br>[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.<br>[10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다. |
| 제시문<라>, <마> | [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.<br>[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. |
| 문제 3-1 | [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.<br>[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.<br>[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. |
| 문제 3-2 | [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.<br>[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.<br>[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.<br>[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. |

나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 고등학교 수학 | 김원경 | 비상교육 | 2020 | 63-66, 209-211 |
| | 고등학교 수학 | 황선욱 | 미래엔 | 2020 | 224-225 |
| | 고등학교 수학I | 권오남 | 교학사 | 2020 | 80-96 |
| | 고등학교 수학 | 류희찬 | 천재교과서 | 2018 | 64-69 |
| | 고등학교 수학II | 박교식 | 동아출판 | 2020 | 123-124 |
| | 고등학교 미적분 | 박교식 | 동아출판 | 2020 | 138 |
| | 고등학교 미적분 | 황선욱 | 미래엔 | 2020 | 75-80, 110-120 |

## 5. 문항 해설

제시문 <가>, <나>에서는 합성함수의 정의, 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수를 구하는 방법을 소개한다. <문제 1-1>에서는 이차함수의 합성을 이해하고, 합성함수의 정의를 이용해 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 실수 $a$의 값을 구할 수 있는지를 평가한다. <문제 1-2>에서는 삼각함수의 합성을 정확히 이해하고, 합성함수의 정의를 이용해 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 실수 $a$의 범위를 구할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>에서는 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계에 대하여 설명한다. <문제 2-1>에서는 근과 계수와의 관계를 이용하여 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선이 서로 수직이 되는 $a$의 값을 구할 수 있는지를 평가한다. <문제 2-2>에서는 접선의 방정식을 구하는 연립이차방정식을 구하고 $a$의 값에 따른 방정식의 해의 개수를 바르게 구하여 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선의 개수가 두 이차함수의 그래프의 교점의 개수와 같음을 보일 수 있는지를 평가한다.

제시문 <라>, <마>에서는 정적분과 치환적분법의 정의를 소개한다. <문제 3-1>에서는 주어진 함수의 성질을 활용하여 정적분 값에 대한 주어진 조건을 만족시키는 실수 $c$를 구할 수 있는지를 평가한다. <문제 3-2>에서는 치환적분법과 주어진 함수의 성질을 활용하여 정적분 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

## 6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 문제 <1-1>, <1-2>

① <1-1>, <1-2>에서 합성함수의 의미를 정확히 이해한다.
② <1-1>에서 $f(f(x))=0$인 조건을 파악한다.
③ <1-1>에서 합성함수의 정의를 이용해 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 조건을 구한다.
④ <1-2>에서 $f(f(x))=0$인 조건을 파악한다.
⑤ <1-2>에서 삼각함수의 합성을 정확히 이해한다.
⑥ <1-2>에서 합성함수의 정의를 이용해 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건을 구한다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <2-1>, <2-2>

① <2-1>에서 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하고 연립이차방정식을 구한다.
② <2-1>에서 연립방정식을 풀어 동시에 접하는 직선이 두 개 존재함을 확인한다.
③ <2-1>에서 두 직선이 수직으로 만날 조건을 이용하여 $a$의 값을 바르게 구한다.
④ <2-2>에서 $a$의 값에 따른 두 이차함수의 그래프의 교점의 개수를 구한다.
⑤ <2-2>에서 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하고 연립이차방정식을 구한다.
⑥ <2-2>에서 $a$의 값에 따른 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선의 개수를 구한다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우

4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <3-1>, <3-2>
① <3-1>에서 $f(x)+f(c-x)=c$의 의미를 정확히 이해하고 활용한다.
② <3-1>에서 치환적분법을 적용하여 정적분의 값을 구한다.
③ <3-1>에서 실수 $c$의 값을 정확히 구한다.
④ <3-2>에서 주어진 조건식을 이용하여 적분식을 적절히 변형한다.
⑤ <3-2>에서 치환적분법과 합성함수의 성질을 적절히 활용한다.
⑥ <3-2>에서 주어진 정적분의 값을 정확히 구한다.

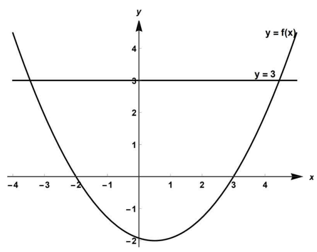
1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

## 7. 예시 답안

■ 1-1

$a>0$일 때 $f(f(x))=0$이기 위해서는, $f(x)=3$ 또는 $f(x)=-2$이다.

또, $a>0$이고 $f'(x)=a(2x-1)=0$이므로, $x=\dfrac{1}{2}$에서 $f(x)$는 최솟값을 가진다.




(1) $f(x)=3$이면 $f(x)=a(x+2)(x-3)=3$이다.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=a\left(\dfrac{1}{2}+2\right)\left(\dfrac{1}{2}-3\right)=-\dfrac{25}{4}a<0$이므로 방정식 $f(x)=3$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=-2$이면 $f(x)=a(x+2)(x-3)=-2$이다. $f(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이고, $f(x)=3$은 항상 서로 다른 두 실근을 가지므로, 방정식 $f(x)=-2$는 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

그러기 위해서는 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{25}{4}a=-2$이어야 하므로 $a=\frac{8}{25}$이다.

따라서 $a=\frac{8}{25}$이다.

(별해) $f(x)=a(x+2)(x-3)=3$을 정리하면 $ax^2-ax-6a-3=0$이고 판별식은

$$D=a^2+4a(6a+3)=25a^2+12a>0$$

이므로 방정식 $f(x)=3$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(x)=a(x+2)(x-3)=-2$를 정리하면 $ax^2-ax-6a+2=0$이다. 방정식 $f(x)=-2$는 오직 하나의 실근을 가져야 하므로 판별식은

$$D=a^2+4a(6a-2)=25a^2-8a=0$$

이다. 따라서 $a=\frac{8}{25}$이다.

■ 1-2

$a>0$일 때 $f(f(x))=0$이기 위해서는, $f(x)=n\pi\,(n=0,1,2,3,\cdots)$이다.

또, $a>0$이고 $f'(x)=a\cos x=0$이므로, $x=\frac{\pi}{2}$에서 $f(x)$는 최댓값을 가진다.

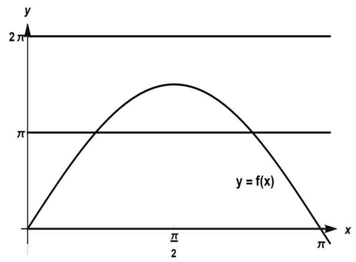
(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $x=0$ 또는 $x=\pi$이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 방정식 $f(x)=\pi$가 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 조건은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\sin\frac{\pi}{2}=a>\pi$이다.

또한 방정식 $f(x)=\pi$는 $a=\pi$일 때 한 실근을 갖는다.

(3) 방정식 $f(x)=2\pi$가 실근을 갖지 않을 조건은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\sin\frac{\pi}{2}=a<2\pi$이다.

또한 방정식 $f(x)=2\pi$는 $a=2\pi$일 때 한 실근을 갖는다.




$a=\pi$일 때 서로 다른 세 실근을 갖고, $a=2\pi$일 때는 서로 다른 다섯 실근을 갖는다. 따라서 서로 다른 네 실근을 갖기 위한 $a$의 범위는 $\pi<a<2\pi$이다.

■ 2-1

두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면, 두 이차방정식 $-x^2-2=mx+n$과 $x^2-2ax+a^2+a=mx+n$은 각각 중근을 갖는다. 따라서 판별식을 이용하면

$$m^2-4(n+2)=0$$

$$(m+2a)^2-4(-n+a^2+a)=0$$

이다. 두 식을 더하여 $n$을 소거하면

$$m^2+(m+2a)^2-4(a^2+a+2)=2m^2+4am-4a-8=0$$

즉,

$$m^2+2am-2a-4=0 \ \cdots\cdots \ ①$$

이다. 방정식 ①의 판별식은 $\frac{D}{4}=a^2+2a+4=(a+1)^2+3>0$이므로 모든 실수 $a$에 대하여 서로 다른 두 실근을 갖는다. $n$의 값은 $m$에 의하여 결정되므로 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선이 두 개 존재한다. 방정식 ①의 두 근이 각각 두 직선의 기울기이므로, 두 직선이 서로 수직으로 만난다면 두 근의 곱이 $-1$이다. 따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$$-2a-4=-1$$

이고, 따라서 $a=-\frac{3}{2}$이다.

■ 2-2

두 이차함수 $y=x^2$과 $y=ax^2-ax$의 교점의 개수는 방정식 $x^2=ax^2-ax$의 실근의 개수와 같다. 이 식을 정리하면 $x((a-1)x-a)=0$이므로, 두 이차함수의 교점의 개수는 다음과 같다.

$a=1$이면 교점의 개수는 1

$a\neq 1$이면 교점의 개수는 2

두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면, 두 이차방정식 $x^2=mx+n$과 $ax^2-ax=mx+n$은 각각 중근을 갖는다. 따라서 판별식을 이용하면

$$m^2+4n=0$$

$$(m+a)^2+4an=0$$

이다. 두 식을 정리하면 $m$에 관한 방정식

$$(m+a)^2-am^2=(1-a)m^2+2am+a^2=0 \ \cdots\cdots \ ②$$

을 얻는다.

(1) $a=1$이면 방정식 ②는 일차방정식이 되어 한 실근 $m=-\frac{1}{2}$을 갖는다. 이때 $n=-\frac{1}{16}$이다. 따라서 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선의 개수는 1이다.

(2) $a\neq 1$이면 방정식 ②는 이차방정식이 되며 판별식은

$$\frac{D}{4}=a^2-a^2(1-a)=a^3$$

이다. $a>0$이므로 $\frac{D}{4}>0$이 되어 두 실근을 갖는다. $n$의 값은 $m$에 의하여 결정되므로 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선의 개수는 2이다.

따라서 두 이차함수의 그래프에 동시에 접하는 직선의 개수와 두 이차함수의 그래프의 교점의 개수는 서로 같다.

■ 3-1

함수 $f(x)$의 성질에 의하여

$$\int_0^c \{f(x)+f(c-x)\}dx=c^2 \ \cdots\cdots \ ③$$

이다. $c-x=t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=-1$이고 $c-0=c,\ c-c=0$이므로

$$\int_0^c f(c-x)dx=\int_0^c f(t)dt$$

이다. ③에서 정적분의 성질을 이용하면

$$\int_0^c \{f(x)+f(c-x)\}dx = \int_0^c f(x)dx + \int_0^c f(c-x)dx = 2\int_0^c f(t)dt = c^2$$

이므로

$$\int_0^c f(x)dx = \frac{1}{2}c^2$$

이다. 따라서

$$\int_0^c f(x)dx = 2$$

를 만족시키는 실수 $c$의 값은 $c=\pm 2$이다.

■ 3-2

연속함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)+f(c-x)=c$ 이므로

$$f(x)=c-f(c-x) \quad \cdots\cdots \text{④}$$

이다. 따라서 정적분

$$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(x))dx = \int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(c-f(c-x))dx \cdots\cdots \text{⑤}$$

이다. $c-x=t$라 하면 $\dfrac{dx}{dt}=-1$이고 $c-\dfrac{c}{4}=\dfrac{3c}{4}$, $c-\dfrac{3c}{4}=\dfrac{c}{4}$ 이므로

$$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(c-f(c-x))dx = \int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(c-f(t))dt$$

이다. 이때, ④에서 $x$에 $f(t)$를 대입하면 $f(c-f(t))=c-f(f(t))$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(c-f(t))dt &= \int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} \{c-f(f(t))\}dt \\ &= \frac{c^2}{2} - \int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(t))dt\end{aligned}$$

이고 ⑤에 의하여

$$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(x))dx = \frac{c^2}{2} - \int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(t))dt$$

이다. 따라서

$$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(x))dx = \frac{c^2}{4}$$

이다.