2024학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수 답안

- 자 연 계 열 문 항 -

■ 1-1

① $n=3$일 때

(좌변)$= 4\ln 3 = \ln 3^4 = \ln 81$

(우변)$= 3\ln 4 = \ln 4^3 = \ln 64$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

② $n=k\,(k \geq 3)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면,
$(k+1)\ln k > k\ln(k+1)$이다.

$$\begin{aligned}(k+2)\ln(k+1) &= (k+2)\ln(k+1)-(k+1)\ln k+(k+1)\ln k\\ &> (2k+2)\ln(k+1)-(k+1)\ln k\\ &= (k+1)\ln\frac{(k+1)^2}{k}\\ &= (k+1)\ln\left(k+2+\frac{1}{k}\right)\\ &> (k+1)\ln(k+2)\end{aligned}$$

이다.
따라서, $(k+2)\ln(k+1) > (k+1)\ln(k+2)$이므로,
$n=k+1$일 때도 성립한다.
①, ②와 수학적 귀납법에 의해 주어진 부등식은 $n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대해 성립한다.

■ 1-2

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 이라고 하자.

$x \geq 3$ 모든 실수 x 에 대해 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ 이고, $x>e$ 이면 $f'(x)<0$ 이므로

$x \geq 3$ 에서 $f(x)$는 감소한다.
따라서, $f(x)>f(x+1)$ 이 성립하므로
$x \geq 3$인 모든 실수 x 에 대해
$\dfrac{\ln x}{x} > \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ 이 성립한다.

■ 2-1

$g'(x) = -12x^2+12x+24$ 이므로
$g(x)+g'(x) = -4x^3-6x^2+36x+29$ 이다.

따라서, $\int_0^x \{g'(t)+g(t)\}dt$

$= \int_0^x (-4t^3-6t^2+36t+29)dt$

$= -x^4-2x^3+18x^2+29x$

이다.

$f(x) = -x^4-2x^3+18x^2+29x-xg(x)-c$
$\quad = 3x^4-8x^3-6x^2+24x-c$

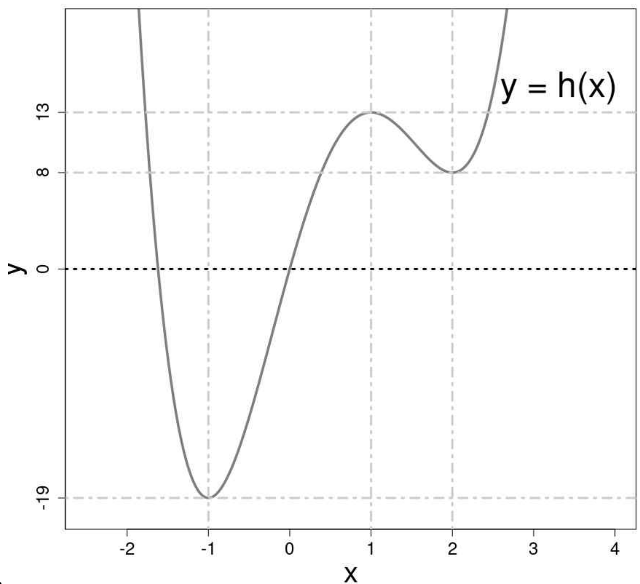
이므로 $3x^4-8x^3-6x^2+24x=c$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 c를 찾자.

$h(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$ 라고 하자.

$h'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$
$\quad =12(x+1)(x-1)(x-2)$

이다.

따라서, $y=h(x)$의 개형을 그리면 다음과 같다.



$h(x)=c$ 가 서로 다른 세 실근을 가지도록 하려면, $c=13$ 이거나 $c=8$ 이면 된다.

■ 2-2

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-c$ 이다. $f'(x)=12(x+1)(x-1)(x-2)$ 이므로,

$f(x)$는 $x=-1$, $x=1$, $x=2$에서 각각 극솟값

$f(-1)=-19-c$, 극댓값 $f(1)=13-c$, 극솟값 $f(2)=8-c$를 가진다.

이때 $-19<c<8$이므로 $f(-1)<0$, $f(1)>0$, $f(2)>0$이다.

이때 함수 $|f(x)|$의 극대와 극소를 조사해 보자. $x=-1$을 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대해 $|f(x)| \le |f(-1)|$이고, $x=1$을 포함하는 어떤 열린구간에 속한 모든 x에 대해 $|f(x)| \le |f(1)|$이고 $x=2$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대해 $|f(x)| \ge |f(2)|$이므로, 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 극댓값
$|f(-1)|=|-19-c|=c+19$, $x=1$에서 극댓값 $|f(1)|=|13-c|=13-c$, $x=2$에서 극솟값 $|f(2)|=|8-c|=8-c$를 갖는다.
또한, $|f(x)|$는 $f(x)=0$을 만족시키는 x에서 극솟값을 갖는다.
한편, $|f(1)|\neq 0$, $|f(2)|\neq 0$이므로, 함수 $|f(x)|$의 서로 다른 극값의 개수가 3인 경우는 $|f(-1)|=|f(1)|$이거나 $|f(-1)|=|f(2)|$일 때이다.
가능한 c는 $-\dfrac{11}{2}$, -3이다.

■ 3-1

집합 $\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\}$은 제시문<다>에 의해 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합들 각각의 원소 합이 서로 다르다.
따라서, $2^4+2^5+2^8$의 원소 합을 가지는 부분집합은 $\{2^4, 2^5, 2^8\}$이 유일하다. 따라서, 가짜 동전들이 들어있는 주머니는 주머니5, 주머니6, 주머니9이다.
부등식 (1)에서 등호가 성립할 때
$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2^{10}-1$이다.
$2^0+2^1+\cdots+2^9=2^{10}-1$이고,
$2^9 \ge 106.8$이므로 등호가 성립할 때 가능한 집합 A_{10}은 $\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\}$이다.

■ 3-2

제시문<다>에서 집합 A_{10}의 $S(C_k)$는 모두 다르다고 했으므로, 집합 C의 서로 다른 원소 개수는 $N=2^{10}-1$개이다.
$S(C_1)<S(C_2)<S(C_3)<\cdots<S(C_n)$이라고 하자. $S(C_n)=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$이고
㉢에 의해 $S(C_n)\ge N$이므로, $a_1+a_2+\cdots+a_{10} \ge 2^{10}-1=1023$이 성립한다.

제시문<다>에서 집합 A_{10}의 가장 큰 원소는 106.8이상을 만족한다고 했으므로 문제의 조건을 만족시키는 집합은 존재하지 않는다.

[숙명여자대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2024학년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 증가와 감소, 수학적 귀납법, 함수의 극대와 극소, 정적분, 부등식, 집합, 부분집합, 등비수열
예상 소요 시간	90 분 / 전체 100 분	

2. 문항 및 제시문

<가>

● 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에서 성립한다는 것은 수학적 귀납법을 이용하여 증명할 수 있다. 수학적 귀납법을 이용하여 다음 명제를 증명해 보자.

㉠ $n \geq 3$인 모든 자연수에 대하여

$$n \ln n > (n-1)\ln(n+1)$$

이다.

먼저 $n=3$일 때를 생각하면,

$$(\text{좌변}) = 3\ln 3 = \ln 3^3 = \ln 27,\ (\text{우변}) = 2\ln 4 = \ln 4^2 = \ln 16$$

이다. 따라서 $n=3$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

$n=k\,(k \geq 3)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$k\ln k > (k-1)\ln(k+1)$$

이다. $n=k+1$일 때를 생각하면,

$$\begin{aligned}(k+1)\ln(k+1) &= (k+1)\ln(k+1) - k\ln k + k\ln k \\ &> (k+1)\ln(k+1) - k\ln k + (k-1)\ln(k+1) \\ &= 2k\ln(k+1) - k\ln k = k\ln\frac{(k+1)^2}{k} = k\ln\left(k+2+\frac{1}{k}\right) \\ &> k\ln(k+2)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $(k+1)\ln(k+1) > k\ln(k+2)$이므로, $n=k+1$일 때도 성립한다.

● 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능할 때, (a,b)의 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 $[a,b]$에서 증가하고, $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 $[a,b]$에서 감소한다.

$x \geq 1$인 모든 실수에 대하여 함수 $f(x) = x\ln x$는 증가함을 보이자. $f(x)$의 도함수는

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

이다. 한편 $x \geq 1$일 때, $\ln x + 1 \geq 1 > 0$이므로 $f'(x) > 0$이다. 따라서 $f(x)$는 $x \geq 1$에서 증가한다.

제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. $n \geq 3$인 모든 자연수에 대하여

$$(n+1)\ln n > n\ln(n+1)$$

임을 수학적 귀납법으로 보이시오.

1-2. $x \geq 3$인 모든 실수에 대하여

$$\frac{\ln x}{x} > \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

임을 보이시오. (단, 무리수 $e = 2.72$이다.)

<나>

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \leq f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라고 하며, 그때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

함수 $f(x)$에서 $x=b$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \geq f(b)$이면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라고 하며, 그때의 함숫값 $f(b)$를 극솟값이라고 한다. 이때, 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다. 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 도함수 $f'(x)$의 부호를 이용하여 극값을 판정할 수 있다. 예를 들면, 사차함수 $f(x)=x^4-2x^2$은 도함수가

$$f'(x)=4x(x+1)(x-1)$$

이므로, $x=0$에서 극대이고, 극댓값은 $f(0)=0$, 그리고 $x=-1$, $x=1$에서 극소이고, 극솟값은

$$f(-1)=f(1)=-1$$

이다. 이 경우 함수 $f(x)$의 극값은 0과 -1이므로 서로 다른 극값의 개수는 2이다.

이제 삼차함수

$$g(x)=2x^3+3x^2-12x-c$$

에 대하여, 실수 c의 값의 범위가 $-7<c<20$일 때, 함수 $|g(x)|$의 서로 다른 극값의 개수가 2가 되게 하는 실수 c의 값을 구해 보자. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수는

$$g'(x)=6(x+2)(x-1)$$

이다.

함수 $g(x)$는 $x=-2$, $x=1$에서 각각 극댓값 $g(-2)=20-c$, 극솟값 $g(1)=-7-c$를 갖는다. 이때, 실수 c의 값의 범위가 $-7<c<20$이므로 $g(-2)>0$이고 $g(1)<0$이다.

이제 함수 $|g(x)|$의 극대와 극소를 조사해 보자. $x=-2$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$|g(x)| \leq |g(-2)|$$

이고, $x=1$을 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$|g(x)| \leq |g(1)|$$

이므로, 함수 $|g(x)|$는 $x=-2$에서 극댓값,

$$|g(-2)|=|20-c|=20-c,$$

$x=1$에서 극댓값,

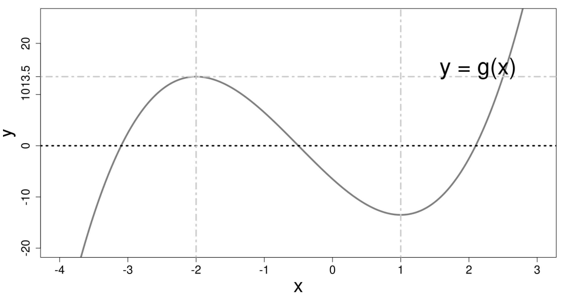
$$|g(1)|=|-7-c|=7+c$$

를 갖는다. 또한, 함수 $|g(x)|$는 $g(x)=0$을 만족시키는 x에서 극솟값을 갖는다.

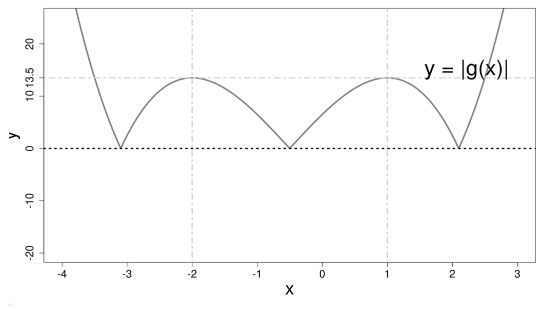
한편

$$|g(-2)| \neq 0,\ |g(1)| \neq 0$$

이므로 함수 $|g(x)|$의 서로 다른 극값의 개수가 2인 경우는 $|g(-2)| = |g(1)|$밖에 없다. 이때, 이를 만족시키는 실수 c의 값은 $\frac{13}{2}$이다. <그림 1>과 <그림 2>는 $c = \frac{13}{2}$일 때, $y = g(x)$의 그래프와 $y = |g(x)|$의 그래프를 각각 그린 것이다.



<그림 1>



<그림 2>

제시문 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. **삼차함수** $g(x) = -4x^3 + 6x^2 + 24x + 5$**와 다항함수** $f(x)$**는**

$$\int_0^x \{g'(t) + g(t)\}dt = xg(x) + f(x) + c \quad \cdots\cdots \quad ①$$

를 만족시킨다. 방정식 $f(x) = 0$**이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수** c**의 값을 모두 구하시오.**

2-2. **다항함수** $f(x)$**는 문제 2-1의 ①을 만족시킨다. 이때,** $-19 < c < 8$**인 실수** c**에 대하여** $|f(x)|$**의 서로 다른 극값의 개수가 3이 되게 하는 실수** c**의 값을 모두 구하시오.**

<다>

㉡ 주머니1, 주머니2, $\cdots$, 주머니10에는 각각 동전들이 2^{10}개 들어 있다. 동전들은 진짜 동전과 가짜 동전으로 구분되며, 진짜 동전들의 무게는 모두 같고, 가짜 동전의 무게는 진짜 동전의 무게보다 1그램이 작다. 각 주머니의 동전들은 모두 진짜이거나 모두 가짜이고, 이 중 모두 가짜 동전들이 들어 있는 주머니는 1개 이상이다.

각각의 주머니k에서 k개, 즉, 주머니1에서 1개, 주머니2에서 2개, $\cdots$, 주머니10에서 10개의 동전을 꺼내, 그 꺼낸 동전들 $1+2+\cdots+10=55$개의 무게를 재었을 때, 그 무게의 합이 55개 동전 모두가 진짜일 때의 합보다 5그램이 작다고 하자. 이때, $5=1+4=2+3$이므로 가짜 동전들이 들어 있는 주머니들의 가능한 경우는 다음의 3가지이다.

주머니5, 주머니1과 주머니4, 주머니2와 주머니3.

ㄷ 집합 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$의 모든 원소는 서로 다른 자연수이고 $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$이면
$$1 \le b_1,\ 2 \le b_2,\ \cdots,\ n \le b_n$$
이다. 즉, 집합 B의 원소의 개수 n은 집합 B의 원소 중 가장 큰 자연수 b_n보다 작거나 같다.

집합 $A_{10}=\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\}$의 모든 원소는 서로 다른 자연수이고, 집합 A_{10}의 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합의 개수는 $2^{10}-1$이다. 이러한 $2^{10}-1$개의 부분집합들은 각각 원소의 합이 서로 다르다고 하자. 이때,
$$a_1+a_2+\cdots+a_{10} \ge 2^{10}-1=1023 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$
임을 증명할 수 있다. 집합 A_{10}의 원소 중 가장 큰 자연수를 x라고 하면
$$a_1+a_2+\cdots+a_{10} \le x+(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-8)+(x-9)=10x-45$$
이고 (1)에 의해 $x \ge \frac{1}{10}(2^{10}+44)=106.8$이다. 집합 A_{10}의 예로는 집합
$$\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\},\ \{2^{10}+1, 2^{10}+2, 2^{10}+2^2, 2^{10}+2^3, \cdots, 2^{10}+2^9\}$$
등이 있다.

제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. ㄴ에 있는 각각의 주머니 k에서 2^{k-1}개의 동전을 꺼내, 그 꺼낸 모든 동전들의 무게를 쟀을 때, 그 무게의 합이 꺼낸 동전 모두가 진짜일 때의 합보다 $2^4+2^5+2^8$그램이 작다면, 가짜 동전들이 들어 있는 주머니들은 무엇인가? 가능한 주머니들의 경우를 찾으시오. 또한 부등식 (1)에서 등호가 성립할 때, 제시문 <다>에서 주어진 집합 A_{10}의 한 예를 찾으시오.

3-2. 제시문 <다>에서 주어진 집합 A_{10}의 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합 $C_1, C_2, \cdots, C_N$의 개수는 $N=2^{10}-1$이다. $1 \le k \le N$인 자연수 k에 대하여, $S(C_k)$를 집합 C_k의 모든 원소들의 합이라고 할 때, 집합
$$C=\{S(C_1), S(C_2), \cdots, S(C_N)\}$$
의 서로 다른 원소의 개수를 구하고, 이 개수와 ㄷ을 이용하여 부등식 (1)을 보이시오. 또한 모든 원소가 서로 다른 10개의 자연수인 집합 중, 다음을 만족시키는 집합이 존재하는지를 판단하시오.

ⓐ 집합의 원소 중, 가장 큰 자연수가 104이다.
ⓑ 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합의 원소의 합이 서로 다르다.

3. 출제 의도

집합, 명제, 함수, 미분과 적분 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용

되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문제들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문제들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 수학적 귀납법, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소의 판정, 부등식, 집합 등에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 1 <가>	[12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ03-07] 수학적 귀납법의 원리를 이해한다. [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
문제 1-1	[12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ03-07] 수학적 귀납법의 원리를 이해한다. [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
문제 1-2	[12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.
제시문 2 <나>	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
문제 2-1	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 2-2	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 3 <다>	[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. [10수학03-02] 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 3-1	[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. [10수학03-02] 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 3-2	[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. [10수학03-02] 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	황선욱외	미래엔	2020	13-15 175-179 204-205 261-264
	고등학교 수학I	권오남외	교학사	2020	116-117 126-132
	고등학교 수학I	홍성복 외	지학사	2020	26-49 148-159
	고등학교 수학II	박교식 외	동아출판	2020	81-95
	고등학교 수학II	최부림 외	천재교육	2020	83-97
	고등학교 미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2020	49-57 76-79
기타					

5. 문항 해설

제시문 <가>에서는 수학적 귀납법을 이용하여 $n \geq 3$인 모든 자연수에 대하여 주어진 부등식을 증명할 수 있음을 소개한다. 또한 미분을 이용하여 $x \geq 1$인 모든 실수에 대하여 주어진 함수의 증가와 감소를

확인할 수 있음을 소개한다. <문제 1-1>에서는 제시문 <가>에 대한 이해를 바탕으로, 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 부등식을 도출하고 이를 증명한다. <문제 1-2>에서는 제시문 <가>에 대한 이해를 바탕으로, 몫의 미분법의 적용과 무리수 e를 이용하여 주어진 함수가 감소함을 파악하고, 이를 바탕으로 부등식을 증명한다.

제시문 <나>에서는 함수의 극대와 극소를 설명하고, 서로 다른 극값의 개수를 판정하는 과정을 소개한다. <문제 2-1>에서는 "정적분과 미분의 관계"와 함수 $f(x)$의 도함수를 이용하여, 함수 $f(x)$의 그래프 개형을 그리고 이를 바탕으로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구할 수 있는지를 평가한다. <문제 2-2>에서는 함수의 극대와 극소에 대한 이해를 바탕으로, 함수 $|f(x)|$의 서로 다른 극값의 개수가 3이 되게 하는 경우를 도출한다.

제시문 <다>에서는 모든 원소가 서로 다른 자연수인 집합들이 소개되며, 그중 어떤 집합은 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합의 원소의 합이 서로 다르다. <문제 3-1>, <문제 3-2>에서는 제시문 <다>에 대한 이해를 바탕으로, 문제에서 주어진 집합이, 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합의 원소의 합이 서로 다름을 파악하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. 특히, 제시문 <다>에서 주어진 부등식들의 이해를 요구한다.

6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 문제 <1-1>, <1-2>

① 제시문 <가>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
② 제시문 <가>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
③ <1-1>에서는 수학적 귀납법의 의미를 정확히 이해한다.
④ <1-1>에서는 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 부등식을 도출하고 이를 증명한다.
⑤ <1-2>에서는 몫의 미분법의 적용과 무리수 e를 이용하여 주어진 함수가 감소함을 보인다.
⑥ <1-2>에서는 주어진 함수가 감소함을 알고, 이를 이용하여 부등식을 증명한다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 4와 5 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <2-1>, <2-2>

① 제시문 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
② 제시문 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
③ <2-1>에서는 "정적분과 미분의 관계"와 함수 $f(x)$의 도함수를 이용하여 함수 $f(x)$의 그래프 개형을 도출한다.

④ <2-1>에서는 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구한다.
⑤ <2-2>에서는 주어진 함수 $|f(x)|$의 극대와 극소를 도출한다.
⑥ <2-2>에서는 함수 $|f(x)|$의 서로 다른 극값의 개수가 3이 되게 하는 실수 c의 값을 구한다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 4와 5 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <3-1>, <3-2>
① 제시문 <다>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
② 제시문 <다>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
③ <3-1>, <3-2>에서 주어진 집합이, 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합의 원소의 합이 서로 다른 집합임을 파악한다.
④ <3-1>에서는 제시문 <다>의 전반부에서 소개되는 빼낸 동전들의 집합과 <3-1>에서 소개되는 빼낸 동전들의 집합의 차이를 파악한다.
⑤ <3-1>, <3-2>에서는 제시문에서 주어진 부등식들에 대한 이해를 평가한다.
⑥ <3-2>의 집합 C의 모든 원소는 서로 다름을 파악한다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 4와 5 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

7. 예시 답안

■ 1-1
먼저 $n=3$일 때를 생각하면,

$$(\text{좌변})=4\ln 3=\ln 3^4=\ln 81,\ (\text{우변})=3\ln 4=\ln 4^3=\ln 64$$

이다. 따라서 $n=3$일 때 주어진 부등식이 성립한다.
$n=k\,(k\geq 3)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(k+1)\ln k > k\ln(k+1)$$

이다. $n=k+1$일 때를 생각하면,

$$\begin{aligned}(k+2)\ln(k+1) &= (k+2)\ln(k+1)-(k+1)\ln k+(k+1)\ln k \\ &> (k+2)\ln(k+1)-(k+1)\ln k+k\ln(k+1) \\ &= 2(k+1)\ln(k+1)-(k+1)\ln k \\ &= (k+1)\ln\frac{(k+1)^2}{k}=(k+1)\ln\left(k+2+\frac{1}{k}\right) \\ &> (k+1)\ln(k+2)\end{aligned}$$

이다. 따라서, $(k+2)\ln(k+1)>(k+1)\ln(k+2)$이므로, $n=k+1$일 때도 성립한다.

■ 1-2

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}\ (x\geq 3)$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{\ln\frac{e}{x}}{x^2}$$

이다. 무리수 $e=2.72$이므로, $x\geq 3$일 때 $\dfrac{e}{x}<1$이고, $\ln\dfrac{e}{x}<0$이므로 $f'(x)<0$이다. 따라서 $f(x)$는 $x\geq 3$에서 감소하고, $x\geq 3$인 모든 실수에 대하여 $f(x)>f(x+1)$이다. 따라서

$$\frac{\ln x}{x}>\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

이다.

■ 2-1

주어진 삼차함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)=-12(x+1)(x-2)$이다. 그리고 “정적분과 미분의 관계”를 이용하여 주어진 등식 ①을 x에 대하여 미분하면

$$g(x)+g'(x)=g(x)+xg'(x)+f'(x)$$

이고, 양변을 정리하면

$$(1-x)g'(x)=12(x+1)(x-1)(x-2)=f'(x)$$

이다. 한편 등식 ①에서 $x=0$을 대입하면 $f(0)=-c$임을 알 수 있다. 다항함수 $f(x)$의 도함수

$$f'(x)=12(x+1)(x-1)(x-2)$$

이므로,

$$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-c$$

이다. 따라서, 방정식 $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-c=0$의 실근의 개수는 두 함수

$$y=3x^4-8x^3-6x^2+24x,\ \ y=c$$

의 그래프의 교점의 개수와 같다.

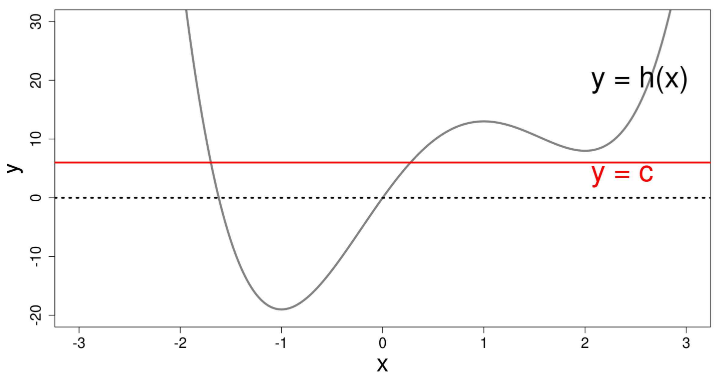
$$h(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$$

라고 하면

$$h'(x)=f'(x)=12(x+1)(x-1)(x-2)$$

이므로 $h'(x)=0$으로부터 $x=-1$, $x=1$, 또는 $x=2$ 이다. $h'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 그 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	0	↗	0	↘	0	↗



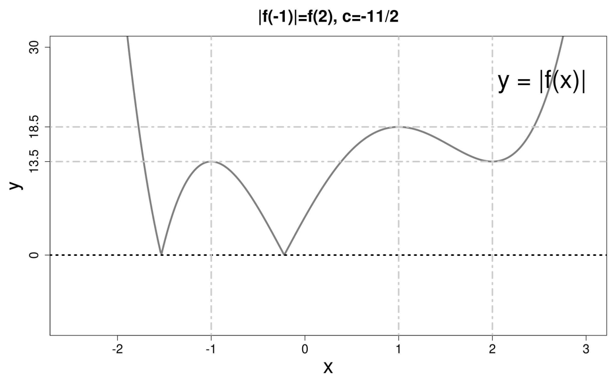
따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 $c = h(2) = 8$ 또는 $c = h(1) = 13$이다.

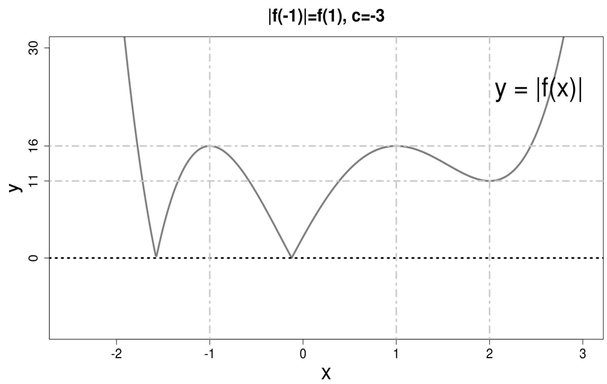
■ 2-2

문제 2-1의 풀이로부터 함수 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - c$는 $x = -1, 1, 2$에서 극값을 가지며 각각의 극값은 $f(-1) = -19 - c$, $f(1) = 13 - c$, $f(2) = 8 - c$이다. 이때, 실수 c의 값의 범위가 $-19 < c < 8$이므로 부등식

$$f(-1) < 0 < f(2) < f(1)$$

을 만족시킨다. 또한, 함수 $|f(x)|$는 $f(x) = 0$을 만족시키는 x에서 극솟값을 갖는다. 따라서 실수 c의 값에 따라 함수 $|f(x)|$의 서로 다른 극값의 개수가 3이 되게 하는 경우는 2가지 밖에 없다. (아래 그림 참조)





경우 1. $|f(-1)| = f(2)$

이 경우에는 함수 $f(x)$의 가장 작은 극솟값인 $f(-1)$의 절댓값이 함수 $f(x)$의 두 번째로 작은 극솟값인 $f(2)$와 같아진다. 이때, $|f(-1)| = f(2)$을 만족시키는 실수 $c = -\dfrac{11}{2}$이다.

경우 2. $|f(-1)| = f(1)$

이 경우에는 함수 $f(x)$의 가장 작은 극솟값인 $f(-1)$의 절댓값이 함수 $f(x)$의 극댓값인 $f(1)$과 같아진다. 이때, $|f(-1)| = f(1)$을 만족시키는 실수 $c = -3$이다.

■ 3-1

㉡에 있는 주머니5, 주머니6, 주머니9가 가짜 동전들이 들어 있는 주머니이고 나머지 주머니에는 진짜 동전들이 들어 있다면, 각각의 주머니k에서 2^{k-1}개의 동전을 꺼내, 그 꺼낸 동전들의 무게를 쟀을 때, 그 무게의 합이 꺼낸 동전 모두가 진짜일 때의 합보다

$$2^4 + 2^5 + 2^8$$

그램이 작다. 한편, 집합 $\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\}$의 부분집합 $\{2^4, 2^5, 2^8\}$의 원소들의 합이 $2^4+2^5+2^8$이고, 집합 $\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\}$의 공집합이 아닌 각각의 부분집합의 원소의 합은 서로 다르므로, 원소들의 합이 $2^4+2^5+2^8$인 부분집합은

$$\{2^4, 2^5, 2^8\}$$

이 유일하다. 따라서, 가짜 동전들이 들어 있는 가능한 주머니들의 경우는

주머니5, 주머니6, 주머니9

가 유일하다.

집합 $\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\}$의 원소의 합은 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^9=2^{10}-1$이고 이 합은 부등식 (1)의 우변과 같다. 집합 $\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\}$의 공집합을 제외한 모든 부분집합은 원소의 합이 다르므로, 부등식 (1)에서 등호가 성립할 때의 가능한 집합 A_{10}은 집합 $\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\}$이 있다.

■ 3-2

$1 \le k \le N$인 자연수 k에 대하여, $S(C_k)$를 집합 C_k의 모든 원소들의 합이라 하고, 집합

$$C=\{S(C_1), S(C_2), \cdots, S(C_N)\}$$

을 생각하자. 집합 A_{10}의 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합의 원소의 합은 서로 다르므로 각각의 $S(C_k)$의 값은 모두 다르다. 따라서 집합 C의 원소의 개수는 "집합 A_{10}의 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합 $C_1, C_2, \cdots, C_N$의 개수"와 같으므로 $N=2^{10}-1$이다. 한편, 집합 C의 원소 중에서 가장 큰 원소는 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$이므로, ㉢에 의해 집합 C의 원소의 개수 $2^{10}-1$은 집합 C의 원소 중 가장 큰 자연수 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$보다 작거나 같다. 즉,

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10} \ge 2^{10}-1$$

이다.

제시문에 의하면 집합 A_{10}의 원소 중 가장 큰 자연수 x는 107보다 크거나 같다. 따라서, 서로 다른 10개의 자연수를 원소로 가진 집합 중, 가장 큰 원소가 104이고 공집합이 아닌 모든 부분집합의 원소의 합이 다른 집합은 존재하지 않는다.