인 등비수열이므로 $\sum_{n=3}^{\infty} q_n = \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\times\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}$ 이다.

(3) y의 값을 먼저 구해보자. 뽑힌 흰 공의 수에 대한 제약이 없다면, 수리가 정확히 5번 만에 A의 위치로 돌아오는 경우의 수는, 첫 번째 시행 후에 가능한 위치는 세 가지이고, 두 번째, 세 번째, 네 번째의 시행 후에 수리의 가능한 위치는 B, C, D 중에서 자기 자신이 아닌 위치인 두 가지이므로, 총 $3\times2\times2\times2=24$가지이다. 따라서 24에서 흰 공이 3번 이상 뽑히는 경우의 수를 빼주면 된다.

공을 뽑는 순서를 달리하더라도, 최종 위치는 변하지 않는다. 흰 공이 5번 뽑히는 경우는 두 번째에 A의 위치로 돌아와야 하고, 4번 뽑히는 경우는 5번째에 A의 위치에 있을 수 없으므로 5번째에 처음으로 A의 위치로 돌아오기 위해서는 흰 공은 3번 이하 뽑혀야 한다. 따라서 y는 24에서 흰 공이 정확히 3번 뽑히는 경우의 수를 뺀 수이다. 흰 공이 정확히 3번 뽑히는 경우에는 반드시 검은 공이 1번, 붉은 공이 1번 뽑혀야 한다.

(i) 처음에 흰 공을 뽑지 않는 경우

두 번째, 세 번째는 무조건 흰 공을 뽑아야 하고 네 번째 흰 공 선택하는지 여부에 따라 한가지로 결정된다. 따라서 경우의 수는 모두 4가지이다.

(ii) 처음에 흰 공이 뽑는 경우

두 번째에는 흰 공이 뽑히면 안 되고, 세 번째는 무조건 흰 공이 뽑혀야 한다. 또한 네 번째 흰 공 선택하는지 여부에 따라 한 가지로 결정이 되므로 총 4가지 경우가 있다.

따라서 전체 방법의 수는 $y=24-8=16$이다.

이제 x의 값을 구해보자. 뽑힌 흰 공의 수에 대한 제약이 없다면, 수리가 정확히 6번 만에 A의 위치로 돌아오는 경우의 수는 $3\times2\times2\times2\times2=48$ 가지다.

이제 흰 공이 세 번 이상 뽑히는 경우를 세어보자. 공을 뽑는 순서를 달리하더라도, 최종 위치는 변하지 않는다. 따라서 흰 공을 정확히 4번 뽑아야 하고, 다른 2개의 공은 색이 같아야 한다.

(i) 처음에 흰 공을 뽑는 경우

두 번째에는 흰 공이 뽑히면 안 되고, 세 번째, 네 번째에는 무조건 흰 공이 뽑혀야 한다. 다섯 번째 흰 공 선택하는지 여부에 따라 한가지로 결정된다. 따라서 경우의 수는 모두 4가지이다.

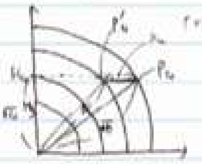
(ii) 처음에 흰 공이 아닌 공을 뽑는 경우

두 번째, 세 번째, 네 번째는 무조건 흰 공을 뽑아야 하고 다섯 번째 흰 공 선택하는지 여부에 따라 한가지로 결정된다. 따라서 경우의 수는 모두 4가지이다.

따라서 전체 방법의 수는 $x=48-8=40$이다.

1번 문항 (반드시 해당문항과 일치하여야 함)

1-1-1. λ_4를 구하기 위해 그림을 그려보자.



($r=1$의 P_0은 [illegible])

빗변의 길이 $\lambda_4 = \overline{P_4P_4'} = \overline{P_4H_4} - \overline{P_4'H_4}$ 이다.

이때 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{P_4H_4}^2 = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{1})^2$, $\overline{P_4'H_4}^2 = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{1})^2$ 이므로 $\lambda_4 = \sqrt{2}-1$ 이다.

위의 방법과 동일하게 $\lambda_3 = \overline{P_3H_3} - \overline{P_3'H_3} = \sqrt{(\sqrt{4})^2 - (\sqrt{1})^2} - \sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{1})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ 이다.

따라서 이를 반복하면 $\lambda_2 = \sqrt{4}-\sqrt{3}$, $\lambda_1 = \sqrt{5}-\sqrt{4}$ 이므로 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = \sqrt{5}-1$ 이다.

1-1-2. 두 점 P_1, P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하고, $\angle P_1OH_1 = \theta_1$, $\angle P_2OH_2 = \theta_2$라 하자.

이때 피타고라스 정리에 의해 ~~$\overline{H_1O}=\sqrt{3}$, $\overline{P_2O}$~~ $\overline{H_1O}=\sqrt{3}$, $\overline{H_2O}=\sqrt{2}$ 이므로 $\tan\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan\theta_2 = 1$이다.

$\tan\alpha = \tan(\theta_2-\theta_1)$이므로 $\tan(\theta_2-\theta_1) = \frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \tan\alpha$이다.

점 P_3에서 y축에 내린 수선의 발의 좌표를 H_3라 한다면, $\angle P_3OH_3 = \beta$이다.

따라서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{P_3H_3} = 1$이므로 $\sin\beta = \frac{1}{2}$ 즉 $\csc\beta = 2$이다.

1-1-3. 직선 P_n과 C_{n+1}이 만나는 점을 P_{n+1}, C_n과 만나는 점을 P_n이라 할 때 밑의 그림과 같은 직각삼각형이 그려진다.

이때 피타고라스 정리에 의해 $y_n = \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ 이다.

따라서 $y_n + \frac{1}{y_n} = \sqrt{n}-\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = 2\sqrt{n}$ 이므로

$2\sqrt{n} \le 20$ 즉 $n \le 100$을 만족하는 자연수 n의 최댓값은 $n=100$이다.

1-2-1. R_1이 정사각형이므로 R_1과 $y=ax^2$이 만나는 한 점은 $(1,-1)$이라 할 수 있다.

이때 $y=ax^2$에 대입하면 $a=-1$이므로 $f(x)=-x^2$이 된다.

이때 A의 넓이 $= 2\int_0^1 f(x)-(-1)\,dx = 2\int_0^1 -x^2+1\,dx = \frac{4}{3}$이다.

~~[illegible]~~ R_2와 $y=-x^2$이 만나는 오른쪽 위의 점을 $(\alpha, -\alpha^2)$이라 하자 $(\alpha>0)$

이때 B의 넓이를 α에 대해 나타내면 $B = 2\int_0^{\alpha} f(x)-(-\alpha^2)\,dx - A$

$= 2\int_0^{\alpha} -x^2+\alpha^2\,dx - \frac{4}{3}$

$= \frac{4}{3}\alpha^3 - \frac{4}{3}$ 이다.

$A=B$이므로 $\frac{4}{3} = \frac{4}{3}\alpha^3 - \frac{4}{3}$ 즉 $\alpha = 2^{\frac{1}{3}}$. 따라서 ~~[illegible]~~ R_2는 가로가 $2\times2^{\frac{1}{3}}$, 세로가 $2\times2^{\frac{2}{3}}$인 직사각형이므로

R_2의 넓이 $= 4\times2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 8$

1-2-2. $f'(x) = -2\cos x\sin x = -\sin2x$ 이고, $f''(x) = -2\cos2x$이다.

따라서 $f''(x)=0$이 되는 구간 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 안의 점에서 $x = \pm\frac{\pi}{4}$를 갖는다.

따라서 $f(x)$의 변곡점은 $(-\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2})$이다.

이때 A의 넓이는 $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)-(-\frac{1}{2})\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2x-\frac{1}{2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos2x}{2}\,dx$ (∵ 삼각함수의 성질에 의하여 $\cos^2x = \frac{1+\cos2x}{2}$)

$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos2x}{2}\,dx = 2\left[\frac{\sin2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} = A$.

$B = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)-(-1)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2x\,dx - A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos2x}{2}\,dx - A = 2\left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - A = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$

$\therefore A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$

1-2-3. 제시문 (나)에서 $g(a)$를 구하는 방식대로 $g(a)$를 구해보면 다음과 같다.

$g(a) = 2\left(|af(a)| - \int_0^a |f(x)|\,dx\right)$. 이때 $f(x)\le0$ 이고, a는 넓이를 구하는 점의 x좌표이므로 $a>0$이다.

따라서 $g(a) = 2\left(-af(a) + \int_0^a f(x)\,dx\right)$이므로 양 변을 a에 대하여 미분하면 $g'(a) = 2(-f(a) - af'(a) + f(a))$를 얻는다.

이때 $a>0$이므로 양변을 a에 대해 나누면 $\frac{g'(a)}{a} = -2f'(a)$ …①

$y=f'(x)$는 미분가능한 함수이므로 $\lim_{a\to0} f'(a) = f'(\lim_{a\to0} a)$가 성립하므로 ①의 양변에 극한을 취해주면 다음과 같다.

$\lim_{a\to0} \frac{g'(a)}{a} = \lim_{a\to0} -2f'(a) = -2f'(\lim_{a\to0} 0) = -2f'(0)$, 이때 $y=f(x)$는 원점을 지나고 y축 대칭이므로 $f'(0)=0$. $\therefore \lim_{a\to0} \frac{g'(a)}{a} = 0$

2번 문항 (반드시 해당문항과 일치하여야 함)

2-1-1. 아루가 점 D를 지나지 않기 위해서는 같은 색의 공을 연속으로 2번 뽑아야 한다.

이때 5번 시행했을 때 ~~[illegible]~~ 같은 색의 공을 연속으로 2번 뽑는 시행 후 아루는 점 A에 위치하므로 다음에 뽑아도 A에 위치할 수 없다.

따라서 $p=0$.

아루가 흰공을 뽑을 확률은 $\frac{2}{5}$, 검은공을 뽑을 확률은 $\frac{3}{5}$ 이므로 흰색 2번 연속으로 뽑을 확률 $=\frac{4}{25}$, 검은색 연속 2번으로 뽑을 확률 $=\frac{9}{25}$ 이다.

~~[illegible]~~ 따라서 같은 연속으로 2번 뽑는 시행을 3번 했을 때 흰공을 m번 연속 2번으로 뽑을 확률은 ${}_3C_m\times(\frac{4}{25})^m\times(\frac{9}{25})^{3-m}$ 이므로

아루가 A점에 위치할 확률 $=\sum_{m=0}^{3}{}_3C_m(\frac{4}{25})^m(\frac{9}{25})^{3-m}=(\frac{4}{25}+\frac{9}{25})^3=(\frac{13}{25})^3$

(흰, 흰 이 k번일)

2-1-2. 2n번의 시행 중 D를 안 지날 때 같은 색의 공을 2번 연속 뽑는 시행을 n번 해야 하므로 (2-1-1)과 비슷한 방법으로 n번 시행했을 때의 확률은 ${}_nC_k(\frac{4}{25})^k(\frac{9}{25})^{n-k}$ 이다.

이때 점 C를 지나가는 데 흰공 2개 연속으로 2번 뽑아야 하므로 ${}_nC_k(\frac{4}{25})^k(\frac{9}{25})^{n-k}$ 이다.

따라서 ~~[illegible]~~ 이때의 기댓값 $=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\times2^k\times(\frac{4}{25})^k\times(\frac{9}{25})^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(\frac{8}{25})^k(\frac{9}{25})^{n-k}=(\frac{17}{25})^n$.

2n번의 시행 중 D를 지날 때의 확률 = 1-(D를 안 지날 때의 확률)이다.

따라서 D를 지날 때 얻는 기댓값 $=0\times(1-(\text{D를 안 지날 때의 확률}))=0$.

따라서 아루가 받을 수 있는 상금의 기댓값은 $(\frac{17}{25})^n$ 이다.

이때 분산 $=E(X^2)-(E(X))^2$ 이므로

$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}4^k(\frac{4}{25})^k(\frac{9}{25})^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(\frac{16}{25})^k(\frac{9}{25})^{n-k}=(\frac{25}{25})^n=1$

$(E(X))^2=(\frac{17}{25})^{2n}$ 이므로 분산 $=1-(\frac{17}{25})^{2n}$ 이다.

2-2-1. 주사위 1의 눈이 나올 확률 $=\frac{1}{6}$, 그 외 눈이 나올 확률 $=\frac{5}{6}$ 이다.

따라서 주사위 눈으로 n-4번 뽑을 확률 $={}_nC_4\times(\frac{1}{6})^{n-4}(\frac{5}{6})^4={}_nC_4\times(\frac{1}{6})^n\times5^4$

n-3번 뽑을 확률 $=$ ~~[illegible]~~ ${}_nC_3\times(\frac{1}{6})^n\times5^3$

n-2번 뽑을 확률 $={}_nC_2\times(\frac{1}{6})^n\times5^2$

n-1번 뽑을 확률 $={}_nC_1\times(\frac{1}{6})^n\times5$

n번 뽑을 확률 $={}_nC_0\times(\frac{1}{6})^n\times1$

따라서 P_n의 확률 ~~[illegible]~~ 구한 확률들의 합이므로 $\frac{1}{n^4}(6^nP_n)=$ ~~[illegible]~~ $\frac{1}{n^4}(\sum_{k=0}^{4}5^k{}_nC_k)$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(6^nP_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\times5^4\times{}_nC_4+0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\times n(n-1)(n-2)(n-3)\times\frac{1}{4\times3\times2\times1}\times5^4=\frac{625}{24}$.

2-2-2. n번째에 처음 실선으로 이동할 확률은 n-1번째까지 검은공 혹은 흰공을 뽑고 n번째에 흰공을 뽑을 확률과 동일하다.

~~[illegible]~~ 이때 흰공을 뽑을 확률 $=\frac{2}{6}$, 검은공 혹은 흰공을 뽑을 확률 $=\frac{4}{6}$ 이므로

$q_n=(\frac{4}{6})^{n-1}\times\frac{2}{6}=(\frac{2}{3})^{n-1}\times\frac{1}{3}$

$\therefore\sum_{n=3}^{\infty}(\frac{2}{3})^{n-1}\times\frac{1}{3}=\lim_{m\to\infty}(\sum_{n=3}^{m}(\frac{2}{3})^{n-1}\times\frac{1}{3})=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\times(\frac{4}{27}(1-(\frac{2}{3})^{m-3}))=\frac{4}{9}$

2-2-3. k번째에 점 C에 ~~[illegible]~~ 위치하는 경우의 수를 C_k

k번째에 점 B에 위치하는 경우의 수를 B_k

k번째에 점 D에 위치하는 확률을 D_k라 할 때, ~~[illegible]~~ B, C, D점에서 A로 이동하여 얻는 경우는 각각 2개씩 있다.

따라서 1이 된 후 A에 위치하기 전의 경우의 수는 ~~[illegible]~~ $3\times2^{k-1}$개이다.

이때 아루는 실선으로 2번 이상 이동해야 하므로 ~~[illegible]~~

이 줄 아래는 답안 작성을 하지 말 것