[문제 1-2]

(1) 색칠되지 않은 칸에 적힌 수 A는 색칠된 칸에 적힌 수의 평균이므로

$$A=\frac{1}{n+1}\left\{1+\sum_{i=1}^{n}(4i^3+4i+10^4)\right\}=\frac{1}{n+1}\{1+n^2(n+1)^2+2n(n+1)+10^4n\}$$

$A\le 10^4$ 이어야 하므로,

$$\frac{1}{n+1}\{1+n^2(n+1)^2+2n(n+1)+10^4n\}\le 10^4$$

이고, 양변에 $n+1$ 을 곱하여 정리하면 $1+n^2(n+1)^2+2n(n+1)\le 10^4$ 이다. $t=n(n+1)$로 치환하면, $1+t^2+2t\le 10^4$ 이 되어, $(t+1)^2\le 10^4$ 이다. 즉, $t\le 99$ 이므로, $n^2+n\le 99$ 이다. 이를 만족하는 가장 큰 양의 정수 n은 9 이다.

(2) A가 적혀 있는 칸부터 2020 이 적혀 있는 칸을 보면, [문제 1-1]의 풀이와 같은 이유로, 수열 $A, x_1, x_2, \cdots, x_{2019}, 2020$ 은 등차수열이 된다. 이 수열의 공차를 d라 한다면,

$$x_1=A+d,\quad x_2=A+2d,\quad 2020=A+2020d$$

이다. 즉, $A=2020-2020d$ 이고, $x_2=A+2d=2020-1018d$ 가 된다. 또한 제시문 (나)에서처럼 A는 세 수 x_2, 2020, -1의 평균이므로

$$2020-2020d=\frac{2020-2018d+2020+(-1)}{3}$$

가 성립한다. 이를 풀면 $2021=4042d$, 즉 $d=\frac{1}{2}$이고, $A=1010$이다.

[문항 2]

[문제 2-1]

(1) P의 x좌표를 p라 하자. 접선의 방정식을 구해보면 $y-(p^3+16)=3p^2(x-p)$이다. 이 접선이 원점을 지나므로, $p^3+16=3p^3$이고 $p=2$이다. 이때 $k=3p^2=12$이다.

이제 곡선 $y=x^3+16$과 직선 $y=17x$와의 교점을 구해보면, $x^3-17x+16=(x-1)(x^2+x-16)=0$이므로 $x=1$, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$에서 해를 가진다. 두 교점 Q, R는 제1사분면 위의 점이므로 두 점의 x좌표는 1과 $\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}$이다. 따라서 P, Q, R의 x좌표의 곱은 $2\times1\times\left(\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}\right)=\sqrt{65}-1$이다.

(2) 두 직선 $y=(t+1)x$, $y=tx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라 하자. 이때 $\tan\alpha=t+1$, $\tan\beta=t$이다. $\theta_t=\alpha-\beta$이므로, $\tan\theta_t=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{1}{t^2+t+1}$이고 $\cot\theta_t=t^2+t+1$이다. 한편, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$가 성립하므로, $f(t)=\csc\theta_t=\sqrt{1+(t^2+t+1)^2}$이다.

따라서 $f(1)=\sqrt{10}$이고 $f'(t)=\dfrac{(t^2+t+1)(2t+1)}{\sqrt{1+(t^2+t+1)^2}}$이므로, $f'(1)=\dfrac{9}{\sqrt{10}}=\dfrac{9}{10}\sqrt{10}$이다.

(3) $f(\theta)=\displaystyle\int_0^\theta(\sin x+\sin 2x)(\cos x+\cos 2x)dx$라 두자. 먼저 $f(0)=0$이므로 $C\geq0$이다. 이때

$$\begin{aligned}(\sin x+\sin 2x)(\cos x+\cos 2x)&=\sin x\cos x+\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x+\sin 2x\cos 2x\\&=\frac{\sin 2x}{2}+\sin 3x+\frac{\sin 4x}{2}\end{aligned}$$

이므로, $f(\theta)$는

$$\begin{aligned}\int_0^\theta\left(\frac{\sin 2x}{2}+\sin 3x+\frac{\sin 4x}{2}\right)dx&=\left[-\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 3x}{3}-\frac{\cos 4x}{8}\right]_0^\theta\\&=\frac{1}{4}-\frac{\cos 2\theta}{4}+\frac{1}{3}-\frac{\cos 3\theta}{3}+\frac{1}{8}-\frac{\cos 4\theta}{8}\end{aligned}$$

이다. 한편 $y=\cos x$의 함숫값은 항상 1이하 이므로, $f(\theta)\geq0$이다. 따라서 $C=0$일 때 $C+f(\theta)\geq0$을 만족한다. 따라서 가장 작은 상수 C는 0이다.

[문제 2-2]

(1) 직선 $y=tx$ 와 곡선 $y=\frac{1}{x}$의 제1사분면의 교점을 구하기 위해, $tx=\frac{1}{x}$라 두면, $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$이다.

즉, P_t의 x좌표를 x_t라 두었으므로, $x_t=\frac{1}{\sqrt{t}}$이다.

한편, 제시문 (나)의 방법을 이용하면, $A(t)$는 정적분 $\int_{x_{t+1}}^{x_t}\frac{1}{x}dx$ 와 선분 OP_{t+1} 를 빗변으로 하는 직각삼각형의 넓이의 합에서 선분 OP_t 을 빗변으로 하는 직각삼각형의 넓이를 빼면 된다. 선분 OP_t 와 선분 OP_{t+1} 을 빗변으로 직각삼각형의 넓이가 각각 $\frac{x_t\times\frac{1}{x_t}}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{x_{t+1}\times\frac{1}{x_{t+1}}}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로

$$A(t)=\left(\int_{x_{t+1}}^{x_t}\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\int_{x_{t+1}}^{x_t}\frac{1}{x}\,dx$$

이다. 즉, $A(t)=\int_{\frac{1}{\sqrt{t+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{1}{x}\,dx=\ln\frac{1}{\sqrt{t}}-\ln\frac{1}{\sqrt{t+1}}=\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t}$ 가 된다.

따라서 $\lim_{t\to\infty}tA(t)=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)^t=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$ 이다.

(2) $f(x)=-\ln\cos x$ 라 두자. 직선 $y=tx$ 와 곡선 $y=f(x)$ 와의 원점이 아닌 교점의 x좌표를 x_t 라 두면 $-\ln\cos x_t=tx_t$ 가 성립한다. 한편, 곡선의 길이 $s(t)=\int_0^{x_t}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ 이므로 $f'(t)=\tan x$ 와 제시문 (다)의 성질을 이용하면,

$$s(t)=\int_0^{x_t}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\int_0^{x_t}\sec x\,dx=\ln(\sec x_t+\tan x_t)$$

$$=\ln\left(\frac{1+\sin x_t}{\cos x_t}\right)=\ln(1+\sin x_t)-\ln(\cos x_t)$$

가 성립한다. 한편 $-\ln(\cos x_t)=tx_t$ 임을 이용하면, $s(t)=\ln(1+\sin x_t)+tx_t$ 이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{s(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{\ln(1+\sin x_t)}{t}+x_t\right\}$$

$t\to\infty$일 때, 교점의 x 좌표 x_t는 점근선 $x=\frac{\pi}{2}$ 와 한없이 가까워지므로 $\frac{\ln(1+\sin x_t)}{t}$ 는 0으로 수렴한다. 따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{s(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln(1+\sin x_t)}{t}+x_t\right)=\frac{\pi}{2}$ 이다.

1번 문항 (반드시 해당문항과 일치하여야 함)

1-1-(1)

$\boxed{5}-\boxed{7}-\boxed{9}-\boxed{11}-\boxed{13}$ 이 <조건>을 만족시킨다.

$\frac{5+9}{2}=7$, $\frac{7+11}{2}=9$, $\frac{9+13}{2}=11$ 이기 때문이다.

1-1-(2) $\frac{0+A_2}{2}=A_1$, $\frac{A_1+A_3}{2}=A_2$, ... $\frac{A_i+A_{i+2}}{2}=A_{i+1}$ $(1\le i\le 47)$ ..... $\frac{A_{48}+2020}{2}=A_{49}$ 이다.

$A_i+A_{i+2}=2A_{i+1}$

$A_{i+2}-A_{i+1}=A_{i+1}-A_i$ 이를 통해 A_i가 등차수열 임을 알 수 있다.

~~$A_i = A_1+(i-1)d$~~ ~~$A_1+(i-1)d$~~ ~~$A_2=A_1+$~~

$A_n=A_1+(n-1)d$ 라고 하자 $(1\le n\le 49)$

$A_2=A_1+d$ $\quad \frac{0+A_1+d}{2}=A_1$ $\quad$ ~~$\frac{A_1}{2}$~~ $A_1=d$

$A_{49}=A_1+48d$ $\quad =2020-49d$

$A_{48}=A_1+47d$ $\quad \frac{2020+A_1+47d}{2}=A_1+48d$ $\quad d=\frac{101}{5}$, $A_1=\frac{101}{5}$

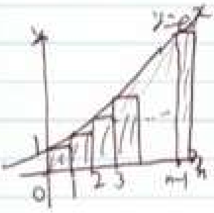
$A_n=\frac{101}{5}n$ $\quad \therefore A_{49}=909$

~~1-1-(3)~~

1-1-(3)

$\frac{\ln B_{i-1}+\ln B_{i+1}}{2}=\ln B_i$ $(2\le i<n-2)$ $\quad \ln B_{n-2}=\ln B_1+(n-3)d'$

$\ln B_k=\ln B_1+(k-1)d'$ $\quad 2\ln B_{n-1}=\ln B_1+(n-3)d'+n$



$\ln B_{i+1}-\ln B_i=\ln B_i-\ln B_{i-1}$ $\quad \ln B_2=\ln B_1+d'$ $\quad 2\ln B_{n-1}=(n-2)\ln B_1+n$

따라서 $\ln B_i$도 등차수열이다.

$\ln B_1+d'=2\ln B_1$ $\quad \ln B_1=d'$ $\quad 2\{(n-1)\ln B_1\}=(n-2)\ln B_1+n$

$\therefore \ln B_k=k$ $\therefore B_k=e^k$ $(1\le k\le n-1)$ $\quad n\ln B_1=n$ $\quad B_1=e$ $\quad d'=1$

그래프를 통해 $B=\sum_{k=0}^{n-1}e^k<\int_0^n e^x\,dx$ 임을 알 수 있다. $\quad \therefore \ln B<n$

~~$\ln B<\ln(e^n-1)<n$~~ 이다. $\quad B<e^n-1$

$\ln B<\ln(e^n-1)<\ln e^n=n$

1-2-(1) 선질 되기 밖은 면에 동시 가 수 H 를 구하자.

$H=\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} 4i^3+4i+10^4\right\}+1}{n+1}$

$n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1\le 10^4$ $\quad$ 이를 만족하는 자연수 중 n은 9이다.

$n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1-10^4\le 0$

$(n(n+1)+1-10^2)(n(n+1)+1+10^2)\le 0$

$H=\frac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+10^4n+1}{n+1}\le 10^4$ $\quad -1-10^2<0\le n(n+1)\le 99$

$n^2+n-99\le 0$

~~$=n^2(n+1)+2n+\frac{10^4n+1}{n+1}$~~ $\quad 1\le n\le \frac{\sqrt{397}-1}{2}$

1-2-(2) $A+1=2y$, $A+2020=2z$, $A+x_2=2x_1$ $\quad x_{i-1}+x_{i+1}=2x_i$ $\quad x_i$는 등차수열이다.

$2019+x_2=3A$ (∵ 제시문 (나)) $\quad x_{i+1}-x_i=x_i-x_{i-1}$ $(2\le i\le 2018)$

$x_k=x_1+(k-1)d''$ $\quad A+x_2=2x_1$, $x_{2018}+2020=2x_{2019}$ $\quad d''=1-\frac{A}{2020}$

$2019+1+\frac{2019}{2020}A+1-\frac{A}{2020}=3A$ $\quad A+x_1+d''=2x_1$ $\quad$ ~~2020~~ $\quad x_1=1+\frac{2019}{2020}A$

~~$\frac{4039}{2020}$~~ $\frac{2021}{1010}A=2021$ $\quad A+d''=x_1$ $\quad x_1+2019d''=2020$

$\therefore A=1010$ $\quad x_1-d''=A$

2번 문항 (반드시 해당문항과 일치하여야 함)

2-1-(1) $y=x^3+16$

$g(x)=x^3-kx+16$ $(k>0)$

$h(x)=x^3-(k+5)x+16$ 이라고 하자.

$h(x)=x^3-17x+16$

$h(x)=(x-1)\left(x-\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-1+\sqrt{65}}{2}\right)\right)$

$h(x)$가 양의 실근을 2개 가진다.

Q, R의 x 좌표의 합은 $\frac{\sqrt{65}-1}{2}\times 2\times 1$

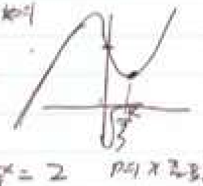
$=\sqrt{65}-1$ 이다.

$g(x)$는 양수인 근이 1개이다.

$g'(x)=3x^2-k$

$x=\sqrt{\frac{k}{3}}$ 일 때

$g'(x)=0$이다.



$g(x)=0$이 되어야 하므로

$+\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}=16$

$\sqrt{\frac{k^3}{3}}=+24$ $\sqrt{k}=+2\sqrt{3}$

$\sqrt{k^3}=-24\sqrt{3}$ $k=12$

$\sqrt{\frac{k}{3}}=2$ 에서 x 좌표는 2이다.

$\therefore k=12$

2-1-(2) $\tan\theta_t=\frac{t+1-t}{1+t(t+1)}=\frac{1}{t^2+t+1}$ $\left(0<\theta_t<\frac{\pi}{2}\right)$

$1+\tan^2\theta_t=\sec^2\theta_t$

$\frac{(t^2+t+1)^2+1}{(t^2+t+1)^2}=\sec^2\theta_t$

$\sec\theta_t=\frac{\sqrt{(t^2+t+1)^2+1}}{t^2+t+1}$

$\cos^2\theta_t=\frac{(t^2+t+1)^2}{(t^2+t+1)^2+1}$

$\sin^2\theta_t=1-\frac{(t^2+t+1)^2}{(t^2+t+1)^2+1}=\frac{1}{(t^2+t+1)^2+1}$

$\csc\theta_t=f(t)=\sqrt{(t^2+t+1)^2+1}$

$f(1)=\sqrt{10}$, $f'(t)=\frac{\cancel{2}(t^2+t+1)(2t+1)}{\cancel{2}\sqrt{(t^2+t+1)^2+1}}$ $f'(1)=\frac{9}{10}\sqrt{10}$

2-1-(3) $(\sin x+\sin 2x)(\cos x+\cos 2x)$

$=\sin x\cos x+\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x+\sin 2x\cos 2x$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin 3x+\frac{1}{2}\sin 4x$

$\therefore C+\int_0^\theta(\sin x+\sin 2x)(\cos x+\cos 2x)\,dx$

$=C-\left(\frac{\cos 2\theta}{4}+\frac{\cos 3\theta}{3}+\frac{\cos 4\theta}{8}\right)-\frac{17}{24}\geq 0$ $(\theta\geq 0)$

$-\frac{17}{24}+\frac{\cos 2x}{4}+\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 4x}{8}\leq C$

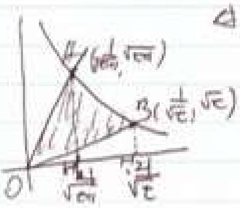
$\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\cos 4\theta$ 모두 최대가 되면

$\frac{\cos 2\theta}{4}+\frac{\cos 3\theta}{3}+\frac{\cos 4\theta}{8}$ 도 최대가 된다. $x=0$이면 된다.

$\therefore$ ~~$C\geq\frac{17}{24}$~~ $\therefore C\geq 0$

C의 ~~최소값은~~ $\frac{17}{24}$ $\therefore$ C의 최소값은 0이다.

2-2-(1)



$\triangle$ 색칠된 넓이를 S라고 하자

~~$S=\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{\sqrt{t+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}}$~~

$S=\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{\sqrt{t+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{1}{x}\,dx-\frac{1}{2}$

$=\int_{\frac{1}{\sqrt{t+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{1}{x}\,dx$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t}$

$=A(t)$

$tA(t)=\frac{1}{2}t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$

$=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$

$\therefore \lim_{t\to\infty}tA(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$

$=\frac{1}{2}$

2-2-(2) $tx_t=-\ln\cos x_t$

~~$\cos x_t\ldots$~~

$\left(0<x_t<\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos x_t=e^{-tx_t}$

$\sec x_t=e^{tx_t}$

$\tan x_t=\sqrt{e^{2tx_t}-1}$

$\lim_{t\to\infty}x_t=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \lim$

$=\lim_{t\to 0}\frac{-\ln\cos x_t}{t}$

$y=-\ln\cos x$

$dy=+\tan x\,dx$

$\frac{dy}{dx}=\tan x$

$l(t)=\int_0^{x_t}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx$

$=\int_0^{x_t}\sec x\,dx$

$=\int_0^{x_t}\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\tan x+\sec x}\,dx$

$(\because$ 제시문 (다)$)$

$=\left[\ln(\tan x+\sec x)\right]_0^{x_t}$

$=\ln(\tan x_t+\sec x_t)$

$=\ln(1+\sin x_t)-\ln(\cos x_t)$

$\lim_{t\to 0}\frac{l(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\sin x_t)-\ln(\cos x_t)}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\sin x_t)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{-\ln(\cos x_t)}{t}$

$=\frac{\pi}{2}+0$

$=\frac{\pi}{2}$

이 줄 아래는 답안 작성을 하지 말 것