2023학년도 수시모집 논술우수전형

논술시험(자연 1)

< 2022. 11. 20.(일) 자연계 1교시 >

모집단위		전형유형	논술우수전형
수험번호		성 명	

□ 답안작성 유의사항

가. 시험 시간은 100분이며, 문제별 답안은 반드시 문제별로 해당되는 답안 작성영역에 작성해야 합니다.(문제번호와 답안번호는 반드시 일치해야 합니다.)

나. 문제별로 해당되는 답안 작성영역에 다른 문제의 답안을 작성한 경우 평가하지 않습니다.

다. 답안은 지정된 작성영역 내에 작성해야 하며, 지정된 작성영역을 초과하여 작성한 부분에 대해서는 평가하지 않습니다.

라. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다. 인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

마. 흑색 필기구를 사용해야 합니다.(연필·샤프 사용가능, 답안작성 중 필기구 종류 또는 색상 변경 불가)

바. 답안 수정 시에는 취소선을 긋거나 지우개로 지워야 하며 수정액이나 수정테이프는 사용할 수 없습니다.

사. 답안지 표지 상단에 본인의 인적사항(모집단위, 수험번호, 성명 등)을 기재하고, 감독위원의 확인을 받아야 합니다.

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

논술시험 (자연 1)

[문제 1]

다음 <제시문1> ~ <제시문4>를 읽고 [문제 1 - i] ~ [문제 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

<제시문1>

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

<제시문2>

중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

<제시문3>

두 직선 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$에서 $mm' = -1$이면 두 직선은 서로 수직이다.

<제시문4>

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 한다. $-1 < x < 0$에서 정의된 곡선 $y = (x+1)^2$ 위의 점 P에서의 접선을 L이라 하자. 또한, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 원 C와 만나는 두 점 중, x좌표가 음수인 점을 A, x좌표가 양수인 점을 B라고 한다.

[문제 1 - i] <제시문4>에서 정의된 점 P와 직선 L에 대해서, 원점 O와 점 P를 연결하는 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$일 때, 직선 L이 원 C와 만나는 두 점을 E, F라 하자. $\overline{\mathrm{EF}}^2$을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 1 - ii] <제시문4>에서 정의된 점 P와 직선 L에 대해서, $\overline{\mathrm{OP}}$가 최소가 될 때 직선 L과 선분 OP가 수직임을 보이고 그 이유를 논하시오.

[문제 1 - iii] <제시문4>에서 정의된 점 P, A, B와 직선 L에 대해서, $\overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{PB}}$가 최댓값을 가질 때 직선 L과 선분 OP가 수직임을 보이고 그 이유를 논하시오.

논술시험 (자연 1)

[문제 2]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 2 - i] ~ [문제 2-iv]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

<제시문1>

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R에 대해 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\sin B}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}=2R$$

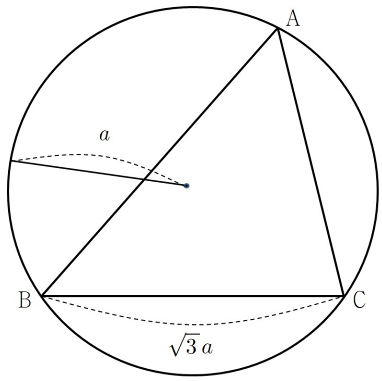
<제시문2>

그림과 같이 양의 실수 a에 대해 반지름이 a인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 다음 세 가지 조건을 만족한다.

(1) $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}a$

(2) $\angle \mathrm{A} < 90^\circ$

(3) $0 < \overline{\mathrm{AC}} \le \overline{\mathrm{AB}}$



[문제 2 - i] <제시문2>의 삼각형 ABC에 대해 $\angle \mathrm{A}$를 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 2 - ii] <제시문2>의 삼각형 ABC에 대해 $a=10$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{AC}}$가 모두 정수가 되는 $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{AC}}$의 값을 모두 찾고 그 이유를 논하시오.

[문제 2 - iii] <제시문2>의 삼각형 ABC에 대해 $a=\sqrt{10}$이라 하자. 2023 이하인 자연수 M에 대해, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}=M$을 만족하는 순서쌍 $(\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{AC}})$가 존재하는 모든 M의 합을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 2-iv] <제시문2>의 삼각형 ABC에 대해 $a=\sqrt{2}$라 하자. 2023 이하인 자연수 N에 대해, $\overline{\mathrm{AB}}^2$과 $\overline{\mathrm{AC}}^2$은 정수가 아니고 $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=N$을 만족하는 순서쌍 $(\overline{\mathrm{AB}}^2, \overline{\mathrm{AC}}^2)$이 존재하는 모든 N의 합을 구하고 그 이유를 논하시오.

논술시험 (자연 1)

[문제 3]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [문제 3 – i] ~ [문제 3-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

<제시문1>

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(a) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(b) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

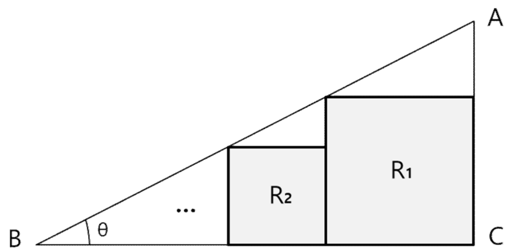
<제시문2>

삼각함수 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

<제시문3>

삼각형 ABC는 $\angle \mathrm{ACB}=90^\circ$이고 $\angle \mathrm{ABC}=\theta$인 직각삼각형이다. 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 내부에 정사각형 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3, \cdots$을 계속해서 만들어 나간다. 이때, 정사각형 R_n의 넓이를 s_n이라고 하자. 이와 같이 정의된 정사각형 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \cdots, \mathrm{R}_n$ 중에서, 모든 홀수 번째 정사각형의 넓이의 합을 P_n이라 하고 모든 짝수 번째 정사각형의 넓이의 합을 Q_n이라 하자. (단, 정사각형 R_1의 한 변의 길이는 1이다.)



[문제 3 – i] <제시문3>에서 정의된 수열 $\{s_n\}$과 $t=\tan\theta$에 대해, 일반항 s_n을 n과 t에 대한 식으로 표현하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3 – ii] <제시문3>에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, $\frac{P_{2023}}{Q_{2023}}+\frac{Q_{2021}}{P_{2021}}$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3 – iii] <제시문3>에서 정의된 2023개의 정사각형 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \cdots, \mathrm{R}_{2023}$ 중에서, 1012개의 홀수 번째 정사각형의 넓이의 평균값 $\frac{P_{2023}}{1012}$과 1011개의 짝수 번째 정사각형의 넓이의 평균값 $\frac{Q_{2023}}{1011}$의 대소관계를 <제시문1>의 수학적 귀납법과 [문제 3 – ii]를 이용하여 판단하고, 그 이유를 논하시오.

2023학년도 수시모집 논술우수전형

논술시험(자연 2)

< 2022. 11. 20.(일) 자연계 2교시 >

모집단위		전형유형	논술우수전형
수험번호		성 명	

□ 답안작성 유의사항

가. 시험 시간은 100분이며, 문제별 답안은 반드시 문제별로 해당되는 답안 작성영역에 작성해야 합니다.(문제번호와 답안번호는 반드시 일치해야 합니다.)

나. 문제별로 해당되는 답안 작성영역에 다른 문제의 답안을 작성한 경우 평가하지 않습니다.

다. 답안은 지정된 작성영역 내에 작성해야 하며, 지정된 작성영역을 초과하여 작성한 부분에 대해서는 평가하지 않습니다.

라. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다. 인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

마. 흑색 필기구를 사용해야 합니다.(연필·샤프 사용가능, 답안작성 중 필기구 종류 또는 색상 변경 불가)

바. 답안 수정 시에는 취소선을 긋거나 지우개로 지워야 하며 수정액이나 수정테이프는 사용할 수 없습니다.

사. 답안지 표지 상단에 본인의 인적사항(모집단위, 수험번호, 성명 등)을 기재하고, 감독위원의 확인을 받아야 합니다.

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

논술시험 (자연 2)

[문제 1]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [문제 1 - i] ~ [문제 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

<제시문1>
첫째항부터 차례대로 일정한 수를 더하여 만든 수열을 등차수열이라 하며, 그 일정한 수를 공차라고 한다. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 제n항에 공차 d를 더하면 제$(n+1)$항이 되므로 다음이 성립한다.

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

<제시문2>
첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라 하며, 그 일정한 수를 공비라고 한다. 공비가 r $(r \neq 0)$인 등비수열 $\{a_n\}$에서 제n항에 공비 r를 곱하면 제$(n+1)$항이 되므로 다음이 성립한다.

$$a_{n+1} = r a_n \quad (r \neq 0,\ n = 1, 2, 3, \cdots)$$

<제시문3>
세 개의 정수로 이루어진 순서쌍의 집합 M을 다음과 같이 정의하자.

$$M = \{(a, b, c) \mid a, b, c\text{는 정수이고 } 1 \le |a|, |b|, |c| \le 100\}$$

이때, 집합 M의 원소의 개수는 200^3이다.

[문제 1 - i] 삼각형의 세 변의 길이가 각각 100이하의 자연수이면서 등차수열을 이루는 삼각형의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 합동인 두 삼각형은 한 개의 삼각형으로 간주한다.)

[문제 1 - ii] 삼각형의 세 변의 길이가 각각 100이하의 자연수이면서 등비수열을 이루는 삼각형의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 합동인 두 삼각형은 한 개의 삼각형으로 간주하며, $\sqrt{5} = 2.236\cdots$이다.)

[문제 1 -iii] <제시문3>에서 정의된 집합 M의 원소 (a, b, c) 중에서 다음의 조건을 모두 만족하는 모든 원소의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

(가) a, b, c는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

(나) a, b, c를 일렬로 나열하여 적어도 한 개의 등비수열을 만들 수 있다. 예를 들어, $(a, b, c) = (1, 2, 3)$인 경우 a, b, c를 일렬로 나열하는 방법은 다음의 여섯 가지가 있다.

① $1, 2, 3$ ② $1, 3, 2$ ③ $2, 1, 3$ ④ $2, 3, 1$ ⑤ $3, 1, 2$ ⑥ $3, 2, 1$

논술시험 (자연 2)

[문제 2]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 2 - i] ~ [문제 2 - iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

<제시문1>

모든 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

$$\cos(x+\pi)=-\cos x$$

$$\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin x$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos x$$

<제시문2>

모든 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

[문제 2 - i] 방정식 $4\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=1$ 이 $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 해를 갖도록 하는 2023 이하의 자연수 n의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 2 - ii] 방정식 $6\cos^2\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=5$ 가 $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 해를 갖도록 하는 순서쌍 (m,n)의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오. (단, m,n은 23 이하인 자연수이다.)

[문제 2 - iii] 방정식 $8\cos^4\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-7\cos^2\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+3\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=1$ 이 $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 해를 갖도록 하는 2023 이하의 자연수 n의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

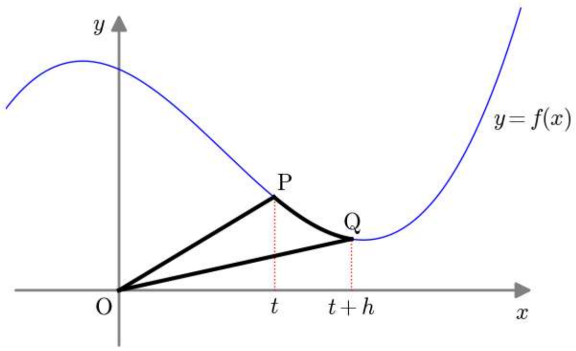
논술시험 (자연 2)

[문제 3]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 3 - i] ~ [문제 3 - iv]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

<제시문1>

상수 a, b, c, d에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 있다 (단, a, d는 양수). 실수 t와 양수 h에 대해 원점 O와 두 점 $\mathrm{P}(t, f(t)), \mathrm{Q}(t+h, f(t+h))$를 각각 잇는 선분 OP, OQ가 있다. 다음 그림과 같은 방식으로 $y=f(x)$의 그래프의 점 P에서 점 Q까지의 부분과 선분 OP, OQ로 둘러싸인 도형의 넓이를 $p(h)$라 하고 $A(t)=\lim_{h \to 0+} \frac{p(h)}{h}$라 하자.



<제시문2>

<제시문1>에서 정의된 함수 $A(t)$가 다음의 조건을 모두 만족한다.

(가) 방정식 $A(t)=0$이 두 개의 실근 α와 β만을 갖는다 (단, $\alpha<\beta$).

(나) 함수 $A(t)$는 $t=\beta$에서 미분가능하지 않다.

(다) 함수 $A(t)$는 극댓값 16을 갖는다.

(라) $\int_0^{2\beta} A(t)dt=38$이다.

[문제 3 - i] <제시문1>에서 주어진 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx$의 값을 a, b, c, d를 사용하여 표현하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3 - ii] <제시문1>에서 주어진 함수 $A(t)$를 a, b, c, d와 t를 사용하여 표현하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3 - iii] <제시문1>에서 주어진 함수 $A(t)$가 <제시문2>의 조건을 만족할 때, α, β와 a의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3 - iv] <제시문1>에서 주어진 함수 $f(x)$가 $\int_0^1 f(x)dx=23$을 만족하고 <제시문1>에서 주어진 함수 $A(t)$가 <제시문2>의 모든 조건을 만족할 때, a, b, c, d의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.