문항카드 3. 논술전형 자연계열 수학 1번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학)/ 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	함수의 최댓값과 최솟값, 중복조합
예상 소요 시간	15분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 좌표평면에서 오른쪽(x축 양의 방향) 또는 위쪽(y축 양의 방향)으로만 움직이며 x좌표와 y좌표가 모두 음이 아닌 정수로 이루어진 점에서만 방향 전환을 하는 로봇이 있다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] 로봇이 원점에서 오른쪽으로 출발하여 $(21, 21)$점까지 움직일 때, 방향 전환을 정확히 5번 거쳐 갈 수 있는 경로의 수를 구하시오. 단, 원점에서는 방향 전환이 일어나지 않는다고 가정한다. [5점]

[문제 1-2] 원점을 중심으로 하고 반지름이 58인 원 모양 테두리를 설정하자. 로봇은 원점을 출발하여 테두리에 닿는 즉시 멈춘다. 로봇이 멈출 때까지 움직인 거리의 최댓값을 구하시오. 단, 로봇은 한 점으로 간주한다. [10점]

3. 출제 의도

중복조합을 이해하고 적용할 수 있는지를 묻고, 미분을 통해 도함수를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ① 순열과 조합 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2017	92-93
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2018	82-88
	미적분	홍성복 외	지학사	2018	119-120
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2018	102-108

	확률과 통계	고성은 외	좋은책 신사고	2018	23-25
	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2018	20-22
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2018	21-23

5. 문항 해설

[문제 1-1]

로봇이 원점에서 점 $(21, 21)$까지 가기 위해서는 x축의 방향으로 21만큼, y축의 방향으로 21만큼 평행이동해야 한다. 첫 방향 전환 전에 x축의 방향으로 x_1만큼, 첫 번째와 두 번째 방향 전환 사이 y축의 방향으로 y_1만큼 이동한다. 같은 방식으로 x_2, y_2, x_3, y_3을 정의하자. 5번의 방향 전환을 거쳐서 점 $(21, 21)$에 도착해야 하므로 두 방정식

$$x_1+x_2+x_3=21,\ y_1+y_2+y_3=21$$

이 각각 성립한다. 이때 x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3은 모두 양의 정수이므로 구하는 경로의 수는

$({}_3\mathrm{H}_{18})^2=({}_{20}\mathrm{C}_2)^2=36100$

[문제 1-2]

$0 \le x \le 58$, $0 \le y \le 58$인 두 실수 x, y에 대하여 로봇이 점 (x, y)에서 멈추었다고 하면 $x^2+y^2=58^2$이고 그때까지 움직인 거리는 $x+y=x+\sqrt{58^2-x^2}$임을 알 수 있다. 함수 $f(x)=x+\sqrt{58^2-x^2}$ $(0 \le x \le 58)$라 하면 도함수 $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{58^2-x^2}}$이 되므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, 29\sqrt{2})$에서 증가하고 열린구간 $(29\sqrt{2}, 58)$에서 감소한다. 그런데 로봇은 x좌표와 y좌표가 모두 음이 아닌 정수로 이루어진 점에서만 방향을 전환하므로 로봇이 멈췄을 때 x좌표 또는 y좌표가 정수이다. 그러나 대칭성에 의해 x좌표가 정수인 경우만 고려해도 충분하다.

$41<29\sqrt{2}<42$이고 $f(41)=41+3\sqrt{187}$, $f(42)=82$이므로 $f(42)<f(41)$

따라서 구하는 거리의 최댓값은 $f(41)=41+3\sqrt{187}$

문항카드 4. 논술전형 자연계열 수학 2번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학)/ 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	수열의 극한, 정적분과 급수와의 관계
예상 소요 시간	20분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = n!$이다. 모든 항이 자연수인 두 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$은 1보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 아래의 성질을 만족시킨다.

(가) b_n의 모든 소인수는 n 이하이다.
(나) $3\log_2 n \le c_n \le 4\log_2 n$
(다) b_n은 ${a_n}^{c_n}$의 약수가 아니다.

다음 수열의 수렴 및 발산을 조사하고 수렴한다면 극한값을 구하시오.

[문제 2-1] $\left\{\dfrac{1}{n}\ln a_{2n} - \dfrac{1}{n}\ln a_n - \ln 2n\right\}$ [5점]

[문제 2-2] $\left\{\dfrac{b_n}{n^2}\right\}$ [10점]

3. 출제 의도

정적분과 급수와의 관계를 이해하고 있는지를 묻고, 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가한다. 또한, 수열의 극한의 대소 관계를 적절히 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	권오남 외	교학사	2018	54-59
	미적분	홍성복 외	지학사	2018	148-149
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2018	177-180
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2018	15-18, 150-152

5. 문항 해설

[문제 2-1]

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\ln a_{2n}-\frac{1}{n}\ln a_n-\ln 2n &= \frac{1}{n}\ln\frac{a_{2n}}{a_n}-\ln 2n\\ &= \frac{1}{n}\ln\frac{(2n)!}{n!}-\ln 2n\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)-\ln 2n\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\ln(n+k)-\ln 2n\}\end{aligned}$$

따라서 정적분과 급수와의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln a_{2n}-\frac{1}{n}\ln a_n-\ln 2n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\ln(n+k)-\ln 2n\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2n}\right)=\int_0^1\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)dx=-1+\ln 2$$

[문제 2-2]

주어진 조건 (가), (다)에 의하여 각 소인수가 n 이하인 b_n이 $a_n^{c_n}$의 약수가 아니므로 적어도 하나의 소인수 p_n이 존재하여 $p_n^{c_n+1}$이 b_n의 약수이다. 따라서 조건 (나)에 의하여

$b_n \geq p_n^{c_n+1} > p_n^{3\log_2 n} \geq 2^{3\log_2 n}=n^3$이다.

그러므로 $\frac{b_n}{n^2}>\frac{n^3}{n^2}=n$이다.

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\infty$이다.

문항카드 5. 논술전형 자연계열 수학 3번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학)/ 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	수열의 합, 이산확률변수, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$
예상 소요 시간	25분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 0을 제외하고 -20부터 20까지 40개의 정수가 하나씩 적혀 있는 40장의 카드들을 두 장씩 짝지어 20쌍을 만들었다. 이 중 임의로 고른 하나의 쌍에서 두 카드에 적힌 숫자의 합을 확률변수 X라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하고, 그 값이 20쌍을 만드는 방법과 상관없이 일정함을 보이시오. [5점]

[문제 3-2] 확률변수 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$의 값이 최대가 되도록 20쌍을 만드는 방법을 찾고, 이때의 $\mathrm{V}(X)$의 값을 구하시오. [10점]

3. 출제 의도

확률변수의 평균과 분산을 수열의 합을 활용하여 계산하고 추론할 수 있는지 묻는다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포 [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2018	146-149
	수학Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2018	146-149
	확률과 통계	홍성복 외	지학사	2019	83-86

	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2019	77-82
	확률과 통계	이문열 외	천재교육	2018	91-95

5. 문항 해설

[문제3-1]

20개의 카드쌍에 적힌 숫자를 각각 $(a_i,\ b_i)$(i는 $1 \le i \le 20$인 자연수)라 하자.

20개의 카드쌍 중 임의로 한 개의 카드쌍을 고를 확률은 $\dfrac{1}{20}$이므로

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{20}(a_i + b_i) = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(a_i + b_i)$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{20}(a_i + b_i) = 0$이므로 $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{20} \times 0 = 0$

따라서 a_i, b_i의 선택과 상관없이 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은 0이다.

[문제3-2]

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \mathrm{E}(X^2)$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{20} \times (a_i + b_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{20} \times \left(a_i^2 + b_i^2 + 2a_ib_i\right)$$

$$= \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\left(a_i^2 + b_i^2\right) + \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{20} a_ib_i \ \cdots\cdots \ ㉠$$

㉠에서 $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}\left(a_i^2 + b_i^2\right)$의 값은 카드를 두 장씩 짝짓는 방법에 상관없이 일정하므로

$\displaystyle\sum_{i=1}^{20} a_ib_i$의 값이 최대가 될 때, $\mathrm{V}(X)$의 값이 최대가 된다.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{20} a_ib_i$의 값이 최대가 되도록 하는 카드쌍 T에 대하여

$a_1 = 20$, $b_1 = x$, $a_2 = 19$, $b_2 = y$ $(-20 \le x \le 18,\ -20 \le y \le 18)$이라 가정하면

$$\sum_{i=1}^{20} a_ib_i = (20x + 19y) + \sum_{i=3}^{20} a_ib_i \ \cdots\cdots \ ㉡$$

이때 위의 카드쌍 T에서 $a_1 = 20$, $b_1 = 19$, $a_2 = a$, $b_2 = b$이 되도록 바꾼 카드쌍 S에 대하여

$$\sum_{i=1}^{20} a_ib_i = (20 \times 19 + xy) + \sum_{i=3}^{20} a_ib_i \ \cdots\cdots \ ㉢$$

㉢ $-$ ㉡

$= xy - 20x - 19y + 20 \times 19$

$= (x - 19)(y - 20) > 0$

이는 카드쌍 T에 대하여 $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} a_ib_i$의 값이 최대라는 것에 모순이므로 $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} a_ib_i$의 값이 최대가 되는 카드쌍에서 20과 19가 쌍을 이룸을 알 수 있다. 이와 같은 과정을 반복하면 $(20, 19)$, $(18, 17)$, $\cdots$, $(2, 1)$, $(-1,\ -2)$, $\cdots$, $(-17,\ -18)$, $(-19,\ -20)$과 같이 20쌍을 만들 때, $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} a_ib_i$의 값이 최대라는 것, 즉

$\mathrm{V}(X)$의 값이 최대임을 알 수 있다. 따라서 구하는 값은

$$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{20} \times 2 \times (39^2 + 35^2 + \cdots + 3^2)$$

$$= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} (4k-1)^2$$

$$= \frac{1}{10} \left(\sum_{k=1}^{10} 16k^2 - \sum_{k=1}^{10} 8k + 10 \right) = 573$$

문항카드 6. 논술전형 자연계열 수학 4번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학)/ 4번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하
	핵심개념 및 용어	벡터, 벡터의 연산, 벡터의 내적
예상 소요 시간	30분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

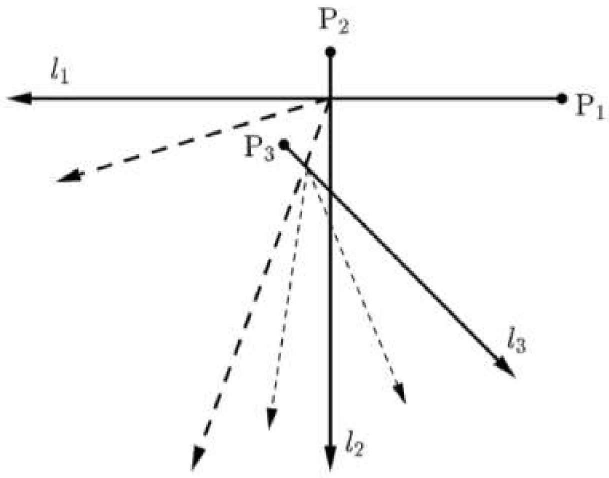
[문제 4] 좌표평면 위의 점 P와 평면벡터 $\vec{v}$에 대하여, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\vec{v}$ $(t \geq 0)$을 만족하는 점 Q가 그리는 반직선을 생각하자. 네 점 $\mathrm{P}_1(6, 4)$, $\mathrm{P}_2(1, 5)$, $\mathrm{P}_3(0, 3)$, $\mathrm{P}_4(0, -1)$과 네 벡터 $\overrightarrow{v_1}=(-1, 0)$, $\overrightarrow{v_2}=(0, -1)$, $\overrightarrow{v_3}=(1, -1)$, $\overrightarrow{v_4}=(1, 1)$에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_i}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}+t\overrightarrow{v_i}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$를 만족시키는 점 Q_i가 그리는 반직선 l_i가 주어져 있다.

다음 제시문을 참고하여 물음에 답하시오.

> [제시문] 두 개의 반직선이 만났을 때, 양의 실수 a에 대하여 다음 규칙을 따라 새로운 반직선들이 생성된다고 하자.
>
> (가) 서로 다른 두 반직선 l_i, l_j $(1 \leq i, j \leq 4)$가 시작점 P_i 또는 P_j가 아닌 점 P에서 만날 때, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\left(a\overrightarrow{v_i}+\overrightarrow{v_j}\right)$ $(t \geq 0)$을 만족시키는 점 R이 그리는 반직선과 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\left(\overrightarrow{v_i}+a\overrightarrow{v_j}\right)$ $(t \geq 0)$을 만족시키는 점 S가 그리는 반직선이 각각 생성된다.
>
> (나) 새로 생성된 반직선들을 포함하여 임의의 서로 다른 두 반직선이 시작점이 아닌 점에서 만날 때에도 (가)의 규칙이 계속 적용된다.

※ 아래는 위 과정을 통해 생성된 일부 반직선들을 나타낸 그림이다.



[문제 4-1] 두 반직선 l_1, l_2에 대하여 [제시문]의 (가)에 따라 새로운 반직선들이 생성될 때, 점 $\mathrm{A}(2, 2)$를 지나는 반직선이 생성될 수 있는 양의 실수 a가 존재하면 그 값을 찾으시오. 만약 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오. [5점]

[문제 4-2] 네 반직선 l_1, l_2, l_3, l_4에 대하여 [제시문]의 (가), (나)에 따라 새로운 반직선들이 생성될 때, 점 $\mathrm{A}(2, 2)$를 지나는 반직선이 생성될 수 있는 양의 실수 a가 존재하면 그 값을 찾으시오. 만약 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오. [10점]

3. 출제 의도

벡터의 정의와 벡터의 합과 실수배의 의미를 정확히 이해하고, 직선과 평면벡터의 내적 간의 관계를 파악할 수 있는지 묻는다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
성취기준	[기하] – (2) 평면벡터 – ① 벡터의 연산 [12기하02-02] 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [기하] – (2) 평면벡터 – ② 평면벡터의 성분과 내적 [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. [12기하02-04] 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. [12기하02-05] 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선과 원의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하	권오남 외	교학사	2019	66-73
	기하	고성은 외	좋은책 신사고	2019	75-82
	기하	황선욱 외	미래엔	2019	96-101
	기하	김원경 외	비상교육	2019	58-92

5. 문항 해설

[문제 4-1]

두 반직선 l_1과 l_2가 점 $\mathrm{P}(1, 4)$에서 만나 생성한 새로운 반직선 l 위의 점 R은 방정식 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\vec{v}$ $(t \geq 0)$을 만족시킨다. $\vec{v}=(c, d)$에 대하여 $\vec{w}=(-d, c)$라 하자.

반직선 l 위의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{v}$이고 $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$이므로 점 R은 $\vec{w}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$을 만족시킨다.

즉, 모든 양의 실수 a에 대하여 $\vec{w}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}>0$이면 반직선 l은 점 A를 지나지 않는다.

조건 (가)에 의하여 $\vec{v}=(-a, -1)$ 또는 $\vec{v}=(-1, -a)$이다.

(ⅰ) $\vec{v}=(-a, -1)$인 경우

$c=-a$, $d=-1$이므로 $\vec{w}=(1, -a)$이다.

$\vec{w}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(1, -a)\cdot(1, -2)=1+2a>0$

(ⅱ) $\vec{v}=(-1, -a)$인 경우

$c=-1$, $d=-a$이므로 $\vec{w}=(a, -1)$이다.

$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} = (a,\ -1) \cdot (1,\ -2) = a + 2 > 0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} > 0$이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 양의 실수 a가 존재하지 않는다.

[문제 4-2]

4-1 풀이의 반직선 l을 l_i로 대체하여 같은 계산을 해 보면 똑같이 $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_i\mathrm{A}} > 0$이 성립함을 확인할 수 있다. (이 값은 $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$일 때 각각 $2,\ 1,\ 1,\ 1$이다.) 시작점이 아닌 교점 P를 갖는 두 반직선 $l_i,\ l_j$에 대하여 4-1의 풀이에서처럼 확인해보면 두 반직선 $l_i,\ l_j$가 생성한 모든 반직선은 $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} > 0$을 만족한다. 이와 같이 네 반직선 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$ 및 이들로부터 생성된 모든 반직선 중 교점을 갖는 임의의 서로 다른 두 반직선을 각각 $m_1,\ m_2$라 하고, 두 반직선 $m_1,\ m_2$를 나타내는 방정식을 각각

$\overrightarrow{\mathrm{OX}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OR}_1} + t\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OX}_2} = \overrightarrow{\mathrm{OR}_2} + t\overrightarrow{u_2}\,(t \geq 0)$이라 하자.

여기서 두 반직선 $m_1,\ m_2$가 P에서 만나 생성한 반직선 m을 나타내는 방정식을 $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{v}$라고 하자. 이때 $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ 또는 $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u_1} + a\overrightarrow{u_2}$이다. $\overrightarrow{v} = (c,\ d)$라고 하면 $\overrightarrow{w} = (-d, c)$에 대하여 $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} > 0$을 보일 경우 A가 이 반직선 위에 있지 않음을 확인할 수 있다.

$u_1 = (c_1, d_1)$, $u_2 = (c_2, d_2)$에 대하여 $w_1 = (-d_1, c_1)$, $w_2 = (-d_2, c_2)$이고 4-1의 풀이에서와 마찬가지로

$\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{R}_1\mathrm{A}} > 0,\ \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{R}_2\mathrm{A}} > 0$ …… ㉠

이다.

또한 두 반직선 $m_1,\ m_2$의 교점 P에 대하여

$\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{R}_1\mathrm{P}} = 0,\ \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{R}_2\mathrm{P}} = 0$ …… ㉡

이다.

㉠, ㉡에서

$\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} > 0,\ \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} > 0$ …… ㉢

이다.

(ⅰ) $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$인 경우

$a\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = (ac_1 + c_2, ad_1 + d_2)$이므로 $\overrightarrow{w} = (-ad_1 - d_2, ac_1 + c_2)$가 되고,

$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$

$a > 0$이므로 ㉢에 의하여

$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} = \left(a\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}}$

$= a\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} > 0$

(ⅱ) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u_1} + a\overrightarrow{u_2}$인 경우

(ⅰ)과 마찬가지로 $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} = \overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} + a\overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} > 0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} > 0$이므로 A가 이 반직선 위에 있지 않다.

이를 반복해서 적용하면 새로 생성된 모든 반직선은 점 A를 지날 수 없음을 알 수 있다.