2024학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열(수학)

모집단위		수험번호		성명	

[문제 1] 좌표평면에서 오른쪽(x축 양의 방향) 또는 위쪽(y축 양의 방향)으로만 움직이며 x좌표와 y좌표가 모두 음이 아닌 정수로 이루어진 점에서만 방향 전환을 하는 로봇이 있다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] 로봇이 원점에서 오른쪽으로 출발하여 점 $(21, 21)$까지 움직일 때, 방향 전환을 정확히 5번 거쳐 갈 수 있는 경로의 수를 구하시오. 단, 원점에서는 방향 전환이 일어나지 않는다고 가정한다. **[5점]**

[문제 1-2] 원점을 중심으로 하고 반지름이 58인 원 모양 테두리를 설정하자. 로봇은 원점을 출발하여 테두리에 닿는 즉시 멈춘다. 로봇이 멈출 때까지 움직인 거리의 최댓값을 구하시오. 단, 로봇은 한 점으로 간주한다. **[10점]**

[문제 2] 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = n!$이다. 모든 항이 자연수인 두 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$은 1보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 아래의 성질을 만족시킨다.

(가) b_n의 모든 소인수는 n 이하이다.
(나) $3\log_2 n \le c_n \le 4\log_2 n$
(다) b_n은 $a_n^{c_n}$의 약수가 아니다.

다음 수열의 수렴 및 발산을 조사하고 수렴한다면 극한값을 구하시오.

[문제 2-1] $\left\{\frac{1}{n}\ln a_{2n} - \frac{1}{n}\ln a_n - \ln 2n\right\}$ **[5점]**

[문제 2-2] $\left\{\frac{b_n}{n^2}\right\}$ **[10점]**

[문제 3] 0을 제외하고 -20부터 20까지 40개의 정수가 하나씩 적혀 있는 40장의 카드들을 두 장씩 짝지어 20쌍을 만들었다. 이 중 임의로 고른 하나의 쌍에서 두 카드에 적힌 숫자의 합을 확률변수 X라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하고, 그 값이 20쌍을 만드는 방법과 상관없이 일정함을 보이시오. **[5점]**

[문제 3-2] 확률변수 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$의 값이 최대가 되도록 20쌍을 만드는 방법을 찾고, 이때의 $\mathrm{V}(X)$의 값을 구하시오. **[10점]**

연세대학교

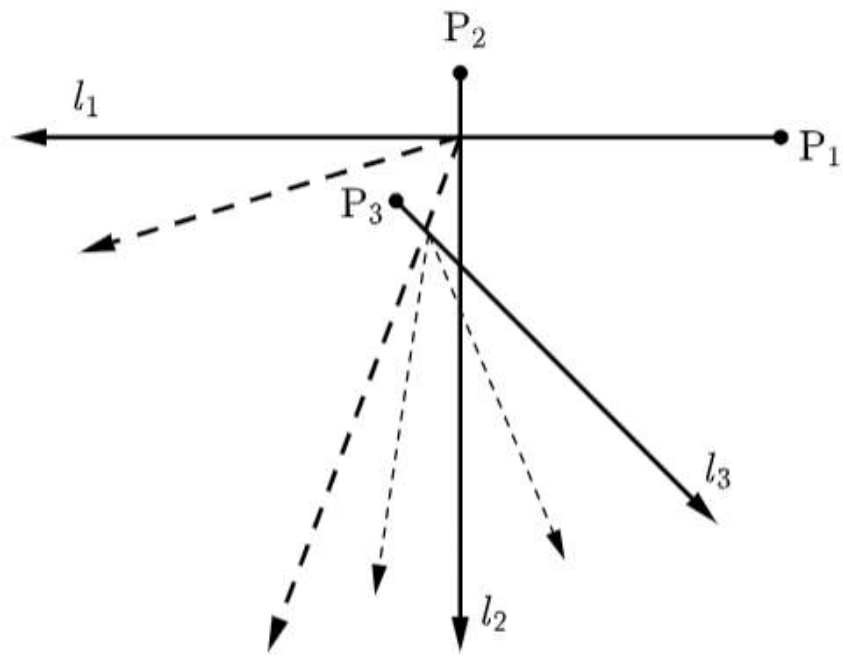
[문제 4] 좌표평면 위의 점 P와 평면벡터 $\vec{v}$에 대하여, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\vec{v}$ $(t \geq 0)$을 만족하는 점 Q가 그리는 반직선을 생각하자. 네 점 $\mathrm{P}_1(6,\ 4)$, $\mathrm{P}_2(1,\ 5)$, $\mathrm{P}_3(0,\ 3)$, $\mathrm{P}_4(0,\ -1)$과 네 벡터 $\overrightarrow{v_1}=(-1,\ 0)$, $\overrightarrow{v_2}=(0,\ -1)$, $\overrightarrow{v_3}=(1,\ -1)$, $\overrightarrow{v_4}=(1,\ 1)$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_i}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}+t\overrightarrow{v_i}\ \ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

를 만족시키는 점 Q_i가 그리는 반직선 l_i가 주어져 있다. 다음 제시문을 참고하여 물음에 답하시오.

> **[제시문]** 두 개의 반직선이 만났을 때, 양의 실수 a에 대하여 다음 규칙을 따라 새로운 반직선들이 생성된다고 하자.
> (가) 서로 다른 두 반직선 l_i, l_j $(1 \leq i,\ j \leq 4)$가 시작점 P_i 또는 P_j가 아닌 점 P에서 만날 때, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\left(a\overrightarrow{v_i}+\overrightarrow{v_j}\right)$ $(t \geq 0)$을 만족시키는 점 R이 그리는 반직선과 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\left(\overrightarrow{v_i}+a\overrightarrow{v_j}\right)$ $(t \geq 0)$을 만족시키는 점 S가 그리는 반직선이 각각 생성된다.
> (나) 새로 생성된 반직선들을 포함하여 임의의 서로 다른 두 반직선이 시작점이 아닌 점에서 만날 때에도 (가)의 규칙이 계속 적용된다.

※아래는 위 과정을 통해 생성된 일부 반직선들을 나타낸 그림이다.



[문제 4-1] 두 반직선 l_1, l_2에 대하여 **[제시문]**의 (가)에 따라 새로운 반직선들이 생성될 때, 점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$를 지나는 반직선이 생성될 수 있는 양의 실수 a가 존재하면 그 값을 찾으시오. 만약 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오. **[5점]**

[문제 4-2] 네 반직선 l_1, l_2, l_3, l_4에 대하여 **[제시문]**의 (가), (나)에 따라 새로운 반직선들이 생성될 때, 점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$를 지나는 반직선이 생성될 수 있는 양의 실수 a가 존재하면 그 값을 찾으시오. 만약 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오. **[10점]**