문항카드 3. 논술전형 자연계열 수학 1번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학)/ 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	합의 법칙, 수학적 확률, 조건부 확률
예상 소요 시간	25분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[제시문 1] 연세로에 2023개의 전등이 1번부터 2023번까지 순서대로 놓여 있다. 모든 전등에는 버튼이 달려 있으며, 전등이 꺼져있을 때 버튼을 누르면 전등이 켜지고, 전등이 켜져있을 때 누르면 꺼진다. 수험번호가 k인 학생은 연세로를 지나가며 전등 번호가 k의 배수인 모든 전등의 버튼을 한 번씩 누른다고 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] 수험번호가 1부터 2023까지의 총 2023명의 학생이 연세로를 지나갔다. 이때 2023번째 전등의 버튼은 모두 몇 번 눌러졌을까? [3점]

[문제 1-2] 모든 전등이 처음에 꺼져있는 상태에서 수험번호가 1부터 2023까지의 학생이 연세로를 지나갔다. 2023명의 학생이 모두 지나간 후 켜져있는 전등 중에서 임의의 전등을 하나를 골랐을 때, 그 전등의 버튼이 총 세 번 눌러졌을 확률을 구하시오. [5점]

[문제 1-3] 모든 전등이 처음에 꺼져있는 상태에서 수험번호가 4부터 2021까지의 학생이 연세로를 지나갔다. 2018명의 학생이 모두 지나간 후 2023개의 전등 중에서 임의로 하나를 골랐을 때, 그 전등이 켜져있을 확률을 구하시오. [9점]

3. 출제 의도

규칙성을 찾아서 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다. 경우의 수와 조건부 확률을 정확히 이해하고 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**수학** [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. **확률과 통계** [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2018	243-244
	수학	홍성복 외	지학사	2018	259-261
	확률과통계	홍성복 외	지학사	2019	45-50

5. 문항 해설

[문제1-1]
n번째 버튼은 수험번호가 n의 약수인 학생들만 누른다.
2023=7×17^2 이므로, 2023의 약수의 개수는 (1+1)×(2+1)=6이다.
따라서 총 6번 눌린다.

[문제1-2]
전등이 켜져 있기 위해서는 버튼을 홀수 번 눌러야 한다.
$n=1$인 경우 약수는 1개뿐이다. $n\geq 2$인 경우 $n=p_1^{k_1}\times\cdots\times p_m^{k_m}$으로 소인수분해 되면 약수의 개수는 $(k_1+1)\times\cdots\times(k_m+1)$이므로 약수의 개수가 홀수이려면 $k_1,\cdots,k_m$이 모두 짝수여야 하므로 n이 제곱수여야 한다.
$44<\sqrt{2023}<45$이므로 2023 이하의 제곱수는 1을 포함하여 모두 44개 있다.
n번째 전등의 버튼이 세 번 눌러지기 위해서는 n의 약수의 개수가 3이어야 하는데 이는 $n=p^2$, 즉 소수의 제곱인 경우다.
44 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43으로 모두 14개다.
따라서, 켜져 있는 전등이 3번 눌렸을 확률은 $\frac{14}{44}=\frac{7}{22}$이다.

[문제 1-3]
전등의 번호 n이 $1\leq n\leq 2021$인 경우를 먼저 생각하자.
1, 2, 3번 학생이 지나가지 않았으므로 1부터 2021까지의 모든 학생이 다 지나갔을 때 보다 전등은 최대 3회 적게 눌러진다.

1번 덜 눌러진 경우는 n이 2의 배수도 3의 배수도 아닌 경우이다,
2번 덜 눌러진 경우는 n이 2의 배수 또는 3의 배수이지만 6의 배수가 아닌 경우이다.
3번 덜 눌러진 경우는 n이 6의 배수인 경우이다.

2021 이하의 자연수 중 2의 배수인 것은 1010개, 3의 배수인 것은 673개, 6의 배수인 것은 336개 있다.

1부터 2021까지의 학생이 모두 지나갔을 때 켜져 있는 전등의 집합을 A, 꺼져 있는 전등의 집합을 B라고 하자.
[문제 1-2]의 풀이에 따라 A의 원소의 개수는 2021 이하의 제곱수의 개수인 44개이다.
이 44개의 제곱수 중 2의 배수는 22개, 3의 배수는 14개, 6의 배수는 7개가 있다.

1번 덜 눌러진 경우: B에 속하는 전등은 켜지고 A에 속하는 전등은 꺼진다.
켜진 전등의 개수는 2021-1010-673+336=674에서 44-22-14+7=15를 뺀 659이다.

<u>2번 덜 눌러진 경우</u>: A에 속하는 전등은 켜지고, B에 속하는 전등은 꺼진다.
켜진 전등의 개수는 22+14-7=29에서 7을 뺀 22이다.
<u>3번 덜 눌러진 경우</u>: A에 속하는 전등은 꺼지고, B에 속하는 전등은 켜진다.
따라서, 켜진 전등의 개수는 336에서 7을 뺀 329이다.

따라서 1부터 2021까지의 전등 중에서 켜진 전등의 개수는 659+22+329=1010이다.

이제 n이 2022, 2023인 경우를 생각하자.
2022=2×3×337 이므로 약수의 개수는 8개이고 1, 2, 3, 2022을 제외하면 4개이다.
2023=7×17^2 이므로 약수의 개수는 6개이고, 1, 2023을 제외하면 4개이다.
두 경우 모두 전등은 꺼져있다.
즉, 켜져 있는 모든 전등의 개수는 1010이다. 따라서 답은 $\frac{1010}{2023}$ 이다.

문항카드 4. 논술전형 자연계열 수학 2번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학)/ 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	극댓값, 극솟값, 정적분
예상 소요 시간	35분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[제시문 2] 구간 $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$의 길이를 모두 $b-a$로 정의한다. 집합 S가 구간 $[0, 1]$의 부분집합이고 서로 겹치지 않는 구간들의 합집합으로 나타날 때, 집합 S의 길이는 각 구간의 길이의 합으로 정의한다. 공집합의 길이는 0이라 한다.

예를 들어 $S=\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{1}{2}, 1\right]$일 때, 집합 S의 길이는

$\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{2}=\frac{11}{18}$이다. 아래의 문제에서 주어진 함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 집합 $S=\{x \mid f(x)>t, 0 \le x \le 1\}$의 길이를 $g(t)$라고 하자. 두 실수 a, b에 대하여 $\min(a, b)=\begin{cases} a & (a<b) \\ b & (a \ge b) \end{cases}$ 으로 정의한다.

다음 물음에 답하시오.

[문제 2-1] $f(x)=36x^3-27x^2-4x+9$ 일 때, $g(6)$을 구하시오. [3점]

[문제 2-2] $f(x)=8x^3-11x^2+3x+5$ 일 때, $g(t)=1$을 만족하는 t의 값의 범위를 구하시오. [3점]

[문제 2-3] $f(x)=\min(ax, bx+c)$ $(a, b, c$는 상수이고 $a>0$, $b<0)$일 때, $g(t)$를 구하고 그래프를 그리시오. [9점]

[문제 2-4] $f(x)=|a(x-b)(x-c)|$ $(-10<a<0,\ -10<b<0,\ 0<c<1$인 상수$)$일 때, $\int_0^{2023} g(t)\,dt$ 의 값을 구하시오. [9점]

3. 출제 의도

제시문의 내용을 수학적으로 명확히 해석할 수 있는지를 묻고, 미분적분학의 기본 내용인 그래프의 개형, 최대 최소, 넓이와 정적분과의 관계등을 활용할 수 있는지를 평가한다. 또한 여러가지 경우를 나누어 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”

문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**수학Ⅱ** [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. **미적분** [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	고성은 외	좋은책신사고	2018	87-95
	수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	86-95
	미적분	박교식 외	동아출판	2019	156-158

5. 문항 해설

[문제 2-1]

부등식 $36x^3 - 27x^2 - 4x + 9 > 6$ 을 정리하면 $(4x-3)(3x-1)(3x+1) > 0$ 이다.

구간 $[0,1]$에서 이를 만족하는 x의 집합은 $S = \left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right]$ 이므로,

$g(6) = \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{12}$ 이다.

[문제 2-2]

$f'(x) = 24x^2 - 22x + 3 = 24\left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right)$ 이므로, 구간 $[0,1]$에서 $f(x)$의 최솟값은 $x = \frac{3}{4}$ 또는 끝점인 $x=0$에서 발생한다. $f(0) = 5$ 이고, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{71}{16}$ 이므로, 최솟값은 $\frac{71}{16}$ 이다.

따라서 $g(t) = 1$ 이려면 $t \le \frac{71}{16}$ 이어야 한다.

[문제 2-3]

직선 $y = ax$ 와 $y = bx + c$ 의 교점 $\left(\frac{c}{a-b}, \frac{ac}{a-b}\right)$ 은 $f(x)$가 최댓값을 가지는 꼭지점이다.

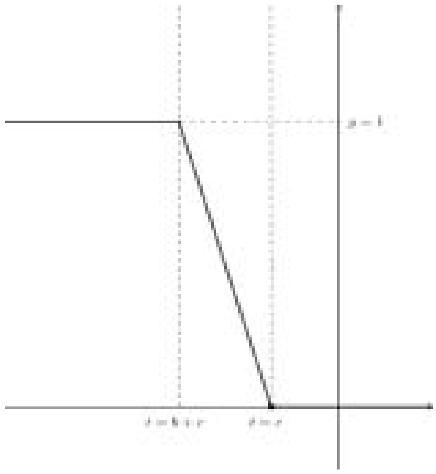
꼭지점의 x좌표가 0 이하인 경우 $(c \le 0)$, 1 이상인 경우 $(c \ge a-b)$, 구간 $(0,1)$에 속하는 경우 $(0 < c < a-b)$를 각각 나누어 생각하자.

세 번째 경우는 $f(0)$과 $f(1)$의 대소에 따라 $b+c \ge 0$과 $b+c < 0$인 두 경우로 세분한다.

즉, 총 4가지 경우가 있다.

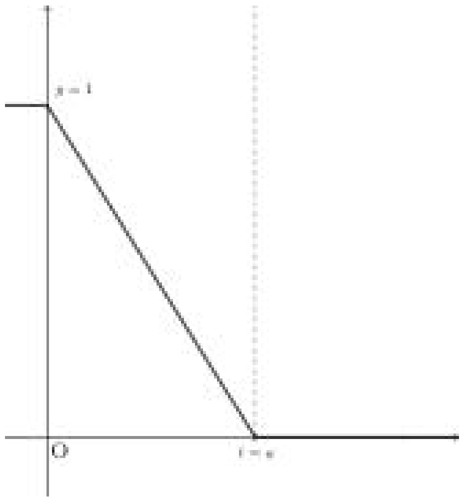
(1) **$c \le 0$ 인 경우**: 구간 $[0,1]$ 에서 $f(x) = bx + c$ 이고 $g(t) = \begin{cases} 1 & (t \le b+c) \\ \frac{t-c}{b} & (b+c \le t \le c) \\ 0 & (c \le t) \end{cases}$.

그래프는 아래와 같다.



(2) $c \geq a-b$ 인 경우: 구간 $[0,1]$ 에서 $f(x)=ax$ 이고 $g(t)=\begin{cases} 1 & (t \leq 0) \\ 1-\dfrac{t}{a} & (0 \leq t \leq a) \\ 0 & (a \leq t) \end{cases}$.

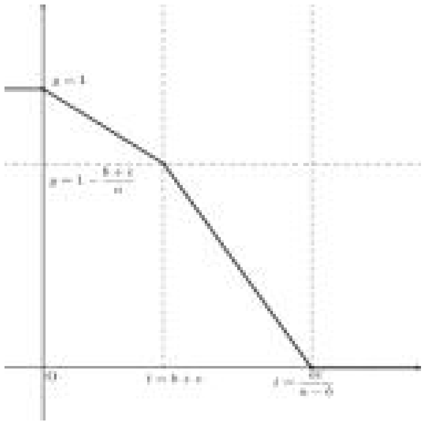
그래프는 아래와 같다.



(3) $0 < c < a-b$, $b+c \geq 0$ (즉 $-b \leq c < a-b$) 인 경우:

$$f(x)=\begin{cases} ax & \left(0 \leq x \leq \dfrac{c}{a-b}\right) \\ bx+c & \left(\dfrac{c}{a-b} \leq x \leq 1\right) \end{cases}, \qquad g(t)=\begin{cases} 1 & (t \leq 0) \\ 1-\dfrac{t}{a} & (0 \leq t \leq b+c) \\ \left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)t-\dfrac{c}{b} & \left(b+c \leq t \leq \dfrac{ac}{a-b}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{ac}{a-b} \leq t\right) \end{cases}.$$

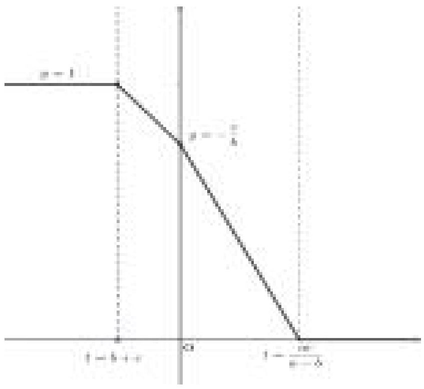
그래프는 아래와 같다.



(4) $0 < c < a - b$, $b + c < 0$ (즉 $0 < c < -b$) 인 경우:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \left(0 \le x \le \dfrac{c}{a-b}\right) \\ bx + c & \left(\dfrac{c}{a-b} \le x \le 1\right) \end{cases}, \qquad g(t) = \begin{cases} 1 & (t \le b+c) \\ \dfrac{t-c}{b} & (b+c \le t \le 0) \\ \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)t - \dfrac{c}{b} & \left(0 \le t \le \dfrac{ac}{a-b}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{ac}{a-b} \le t\right) \end{cases}.$$

그래프는 아래와 같다.



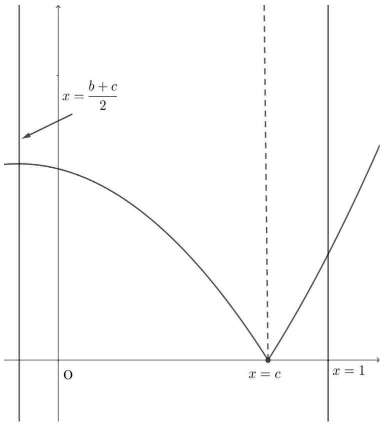
[문제 2-4]

구간 $[0,1]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $x=0$, $x=\dfrac{b+c}{2}$, $x=1$ 중 한 곳에서 발생한다.

따라서 최댓값은 $f(0)=abc$, $f\left(\dfrac{b+c}{2}\right)=-a\left(\dfrac{c-b}{2}\right)^2$, $f(1)=a(1-b)(1-c)$보다 클 수 없고, 조건 $-10 < a < 0$, $-10 < b < 0$, $0 < c < 1$에서는 최댓값은 항상 2023보다 작다.

함수 $g_1(t)$를 집합 $\{x \mid f(x) > t, 0 \le x \le c\}$의 길이로 정의하고,
$g_2(t)$를 집합 $\{x \mid f(x) > t, c < x \le 1\}$의 길이로 정의하면. $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$이다.

(1) $b+c \le 0$ 인 경우:



$t > f(0)$ 이면, $g_1(t)$ 의 값은 0이다. 따라서

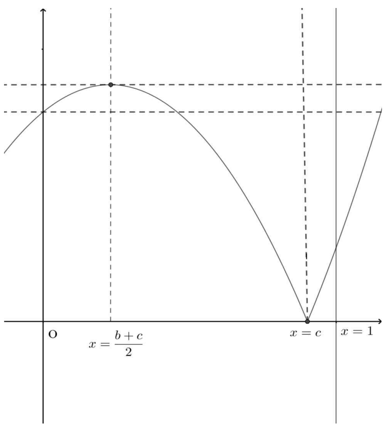
$\int_0^{2023} g_1(t)dt = \int_0^{f(0)} g_1(t)dt$ 은 $y=f(x)$, x축 및 $x=0$, $x=c$ 로 둘러싸인 도형의 넓이다.

또한 $t > f(1)$이면, $g_2(t)$의 값은 0이다. 따라서

$\int_0^{2023} g_2(t)dt = \int_0^{f(1)} g_2(t)dt$ 는 $y=f(x)$, x축 및 $x=c$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이다.

그러므로 $\int_0^{2023} g(t)dt = \int_0^{f(0)} g_1(t)dt + \int_0^{f(1)} g_2(t)dt = \int_0^c f(x)dx + \int_c^1 f(x)dx$ 의 값과 같다.

(2) $b+c > 0$ 인 경우:



$t > f\left(\frac{b+c}{2}\right)$ 이면, $g_1(t)$ 의 값은 0이다. 따라서 $\int_0^{2023} g_1(t)dt = \int_0^{f\left(\frac{b+c}{2}\right)} g_1(t)dt$ 는 $y=f(x)$, x축 및 $x=0$, $x=c$ 로 둘러싸인 도형의 넓이다.

또한 $t > f(1)$ 이면, $g_2(t)$ 의 값은 0이다. 따라서 $\int_0^{2023} g_2(t)dt = \int_0^{f(1)} g_2(t)dt$ 는 $y=f(x)$, x축 및 $x=c$, $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이다.

따라서, $\int_0^{2023} g(t)dt = \int_0^{f\left(\frac{b+c}{2}\right)} g_1(t)dt + \int_0^{f(1)} g_2(t)dt = \int_0^c f(x)dx + \int_c^1 f(x)dx$ 의 값과 같다.

(1), (2) 경우 모두 답은 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^c f(x)dx + \int_c^1 f(x)dx$ 이고, 계산을 하면 $\int_0^c a(x-b)(x-c)\,dx + \int_c^1 -a(x-b)(x-c)\,dx = -a\left(\frac{1}{3}c^3 - bc^2 + bc - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{3}\right)$ 이다.

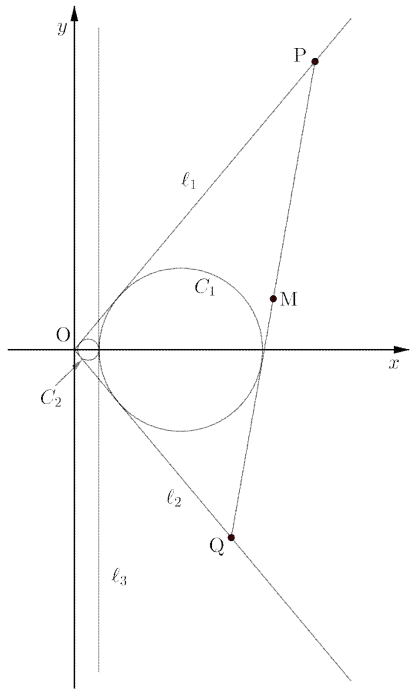
문항카드 5. 논술전형 자연계열 수학 3번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학)/ 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분, 기하
	핵심개념 및 용어	코사인법칙, 덧셈정리, 속도, 타원
예상 소요 시간	30분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[제시문 3] 좌표평면의 원점 O를 지나고 기울기가 m과 $-m$인 (단, $m \geq 1$) 직선을 각각 ℓ_1과 ℓ_2라 하자. 직선 ℓ_1 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 ℓ_2 위의 점 $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$가 조건 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $\overline{\mathrm{PQ}}=1$을 모두 만족하며 움직인다. 다음 물음에 답하시오.



[문제 3-1] 선분 PQ의 중점 $\mathrm{M}(x, y)$가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오. [4점]

[문제 3-2] 점 Q가 원점 O에서 출발하여 일정한 속도 $(1, -m)$으로 직선 ℓ_2 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}$이 되는 순간에 점 P의 속도를 구하시오. [6점]

[문제 3-3] $m=\frac{\sqrt{15}}{3}$이고 $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}$일 때, 삼각형 POQ에 내접하는 원을 C_1이라 하자. 이때, 원 C_1과 x축이 만나는 두 점 중 원점에 더 가까운 점을 지나고 y축과 평행한 직선을 ℓ_3이라 하자. 이때, 직선 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3이 만드는 삼각형에 내접하는 원을 C_2라고 하자. 원 C_1의 중심과 원 C_2의 중심 사이의 거리를 구하시오. [9점]

3. 출제 의도

제시문에 주어진 도형에 관한 내용을 해석하여 수식으로 나타낼 수 있는지를 묻고, 미적분학의 주요 내용인 도함수, 속도와 가속도에 대한 내용을 주어진 문제에 적용하여 해결할 수 있는지를 평가한다. 또한 삼각함수를 적정히 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**수학Ⅰ** [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

	미적분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. **기하** [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	홍성복 외	지학사	2018	95-103
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	68-72, 139-141
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	61-64, 112-114
	기하	홍성복 외	지학사	2019	16-21

5. 문항 해설

[문제 3-1]

점 $P(x_1,y_1)$와 $Q(x_2,y_2)$에 대하여, 조건

$y_1 = mx_1$, $y_2 =-mx_2$, $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$을 모두 만족해야 한다.

$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ 이므로,

$y=\dfrac{m(x_1-x_2)}{2}$, $x=\dfrac{y_1-y_2}{2m}$ 이고, $x_1=x+\dfrac{1}{m}y$, $x_2=x-\dfrac{1}{m}y$ 이다.

이를 조건 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$에 대입하면

정답 $4m^2x^2+\dfrac{4}{m^2}y^2=1$, $y \leq mx$, $y \geq -mx$을 얻는다.

타원과 직선들의 교점을 계산하면 $4m^2x^2+\dfrac{4}{m^2}y^2=1$, $x \geq \dfrac{1}{2\sqrt{m^2+1}}$ 도 정답이다.

[문제 3-2]

$\mathrm{Q}(t,-mt)$라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{1+m^2}\,t=\dfrac{1}{2}$이 되는 순간의 시각은 $t=\dfrac{1}{2\sqrt{1+m^2}}$ 이다.

$\mathrm{P}(s,ms)$라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$로부터 $(s-t)^2+m^2(s+t)^2=1$을 얻고 이를 s에 관한 식으로 정리하면 $(1+m^2)s^2+2(m^2-1)ts+(1+m^2)t^2-1=0$이다.

근의 공식을 이용하여 정리하고, $s \geq 0$을 고려하면 $s=\dfrac{(1-m^2)t+\sqrt{(1+m^2)-4m^2t^2}}{1+m^2}$ 이다.

따라서, $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{1}{1+m^2}\left(1-m^2-\dfrac{4m^2t}{\sqrt{(1+m^2)-4m^2t^2}}\right)$이고 여기에 $t=\dfrac{1}{2\sqrt{1+m^2}}$을 대입하면,

$\dfrac{1}{1+m^2}\left(1-m^2-\dfrac{2m^2}{\sqrt{1+m^2+m^4}}\right)$이다.

그러므로 P의 속도는 $\left(\dfrac{1}{1+m^2}\left(1-m^2-\dfrac{2m^2}{\sqrt{1+m^2+m^4}}\right), \dfrac{m}{1+m^2}\left(1-m^2-\dfrac{2m^2}{\sqrt{1+m^2+m^4}}\right)\right)$이다.

[문제 3-3]

원 C_1과 C_2의 반지름의 길이를 각각 R와 r라 하자.

$\mathrm{Q}\left(t, -\dfrac{\sqrt{15}}{3}t\right)$라 할 때, 조건 $\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}t=\dfrac{1}{2}$에서 $t=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$을 얻는다.

[문제 3-2]의 풀이처럼 $\mathrm{P}\left(s, \dfrac{\sqrt{15}}{3}s\right)$로 두면 조건 $1=\left(s-\dfrac{\sqrt{6}}{8}\right)^2+\dfrac{15}{9}\left(s+\dfrac{\sqrt{6}}{8}\right)^2$에서

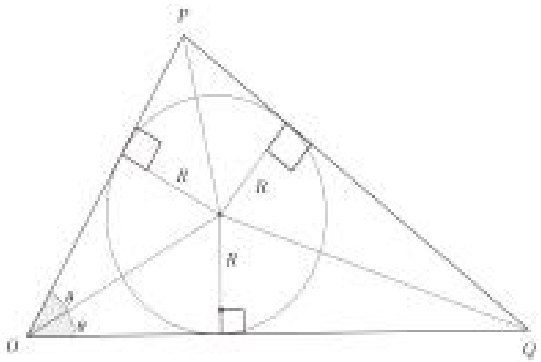
$s=\dfrac{3}{16}\sqrt{6}$을 얻는다. 따라서 $\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\,s=\dfrac{3}{4}$이다.

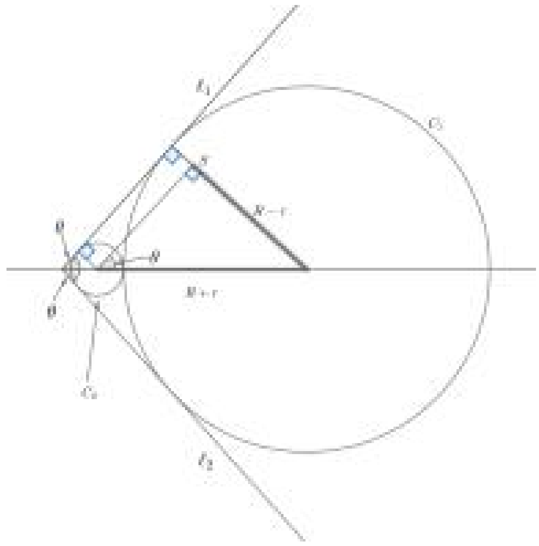
또한 직선 ℓ_1과 x축이 이루는 각을 θ라 할 때, $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$이다.

삼각비로부터 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$을 찾는다. 따라서 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ 이다.

삼각형 OPQ의 넓이에 대한 두 가지 공식을 이용하여 등식

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}(\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{PQ}})\times R$을 얻고, 이로부터 $R=\dfrac{\sqrt{15}}{24}$을 얻는다.





원 C_1의 중심을 지나고 직선 ℓ_1에 수직인 직선을 ℓ_3라고 하자.

원 C_2의 중심에서 ℓ_3에 내린 수선의 발을 S라고 하고, S와 두 원의 중심을 꼭지점으로 하는

직각삼각형을 생각하면 등식 $\dfrac{R-r}{R+r}=\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$에서 $\dfrac{r}{R}=\dfrac{4-\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}}$을 구할 수 있다.

그런데 $R=\dfrac{\sqrt{15}}{24}$이므로 $R+r=\dfrac{2}{9}\sqrt{15}-\dfrac{5}{18}\sqrt{6}$이다.