2023학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열(수학)

모집단위		수험번호		성명	

[제시문 1] 연세로에 2023개의 전등이 1번부터 2023번까지 순서대로 놓여 있다. 모든 전등에는 버튼이 달려 있으며, 전등이 꺼져있을 때 버튼을 누르면 전등이 켜지고, 전등이 켜져있을 때 누르면 꺼진다. 수험번호가 k인 학생은 연세로를 지나가며 전등 번호가 k의 배수인 모든 전등의 버튼을 한 번씩 누른다고 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] 수험번호가 1부터 2023까지의 총 2023명의 학생이 연세로를 지나갔다. 이때 2023번째 전등의 버튼은 모두 몇 번 눌러졌을까? **[3점]**

[문제 1-2] 모든 전등이 처음에 꺼져있는 상태에서 수험번호가 1부터 2023까지의 학생이 연세로를 지나갔다. 2023명의 학생이 모두 지나간 후 켜져있는 전등 중에서 임의의 전등을 하나를 골랐을 때, 그 전등의 버튼이 총 세 번 눌러졌을 확률을 구하시오. **[5점]**

[문제 1-3] 모든 전등이 처음에 꺼져있는 상태에서 수험번호가 4부터 2021까지의 학생이 연세로를 지나갔다. 2018명의 학생이 모두 지나간 후 2023개의 전등 중에서 임의로 하나를 골랐을 때, 그 전등이 켜져있을 확률을 구하시오. **[9점]**

[제시문 2] 구간 $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$의 길이를 모두 $b-a$로 정의한다. 집합 S가 구간 $[0, 1]$의 부분집합이고 서로 겹치지 않는 구간들의 합집합으로 나타날 때, 집합 S의 길이는 각 구간의 길이의 합으로 정의한다. 공집합의 길이는 0이라 한다.
예를 들어 $S=\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{1}{2}, 1\right]$일 때, 집합 S의 길이는 $\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{2}=\frac{11}{18}$이다. 아래의 문제에서 주어진 함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 집합 $S=\{x \mid f(x)>t,\ 0\le x\le 1\}$의 길이를 $g(t)$라고 하자. 두 실수 a, b에 대하여 $\min(a, b)=\begin{cases} a & (a<b) \\ b & (a\ge b)\end{cases}$으로 정의한다.
다음 물음에 답하시오.

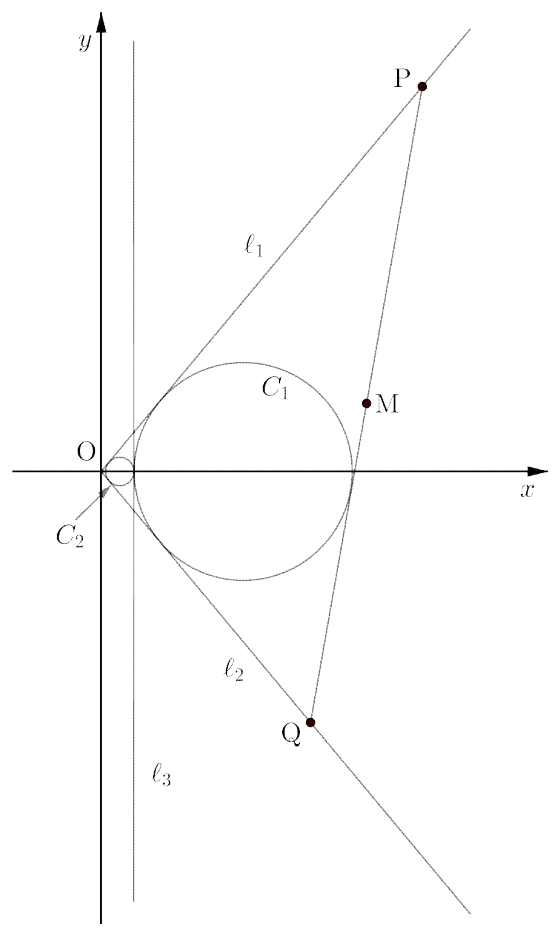
[문제 2-1] $f(x)=36x^3-27x^2-4x+9$ 일 때, $g(6)$을 구하시오. **[3점]**

[문제 2-2] $f(x)=8x^3-11x^2+3x+5$ 일 때, $g(t)=1$ 을 만족하는 t의 값의 범위를 구하시오. **[3점]**

[문제 2-3] $f(x)=\min(ax,\ bx+c)$ (a, b, c는 상수이고 $a>0$, $b<0$) 일 때, $g(t)$를 구하고 그래프를 그리시오. **[9점]**

[문제 2-4] $f(x)=|a(x-b)(x-c)|$ ($-10<a<0$, $-10<b<0$, $0<c<1$인 상수) 일 때, $\int_0^{2023} g(t)\,dt$ 의 값을 구하시오. **[9점]**

[제시문 3] 좌표평면의 원점 O를 지나고 기울기가 m과 $-m$인 (단, $m\ge 1$) 직선을 각각 ℓ_1과 ℓ_2라 하자. 직선 ℓ_1 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 ℓ_2 위의 점 $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$가 조건 $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, $\overline{\mathrm{PQ}}=1$을 모두 만족하며 움직인다. 다음 물음에 답하시오.



[문제 3-1] 선분 PQ의 중점 $\mathrm{M}(x, y)$가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오. **[4점]**

[문제 3-2] 점 Q가 원점 O에서 출발하여 일정한 속도 $(1, -m)$으로 직선 ℓ_2 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}$ 이 되는 순간에 점 P의 속도를 구하시오. **[6점]**

[문제 3-3] $m=\frac{\sqrt{15}}{3}$ 이고 $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}$일 때, 삼각형 POQ에 내접하는 원을 C_1이라 하자. 이때, 원 C_1과 x축이 만나는 두 점 중 원점에 더 가까운 점을 지나고 y축과 평행한 직선을 ℓ_3이라 하자. 이때, 직선 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3이 만드는 삼각형에 내접하는 원을 C_2라고 하자. 원 C_1의 중심과 원 C_2의 중심 사이의 거리를 구하시오. **[9점]**

연세대학교