2026학년도 수시모집 논술전형

모의 논술고사 해설지 (자연계열)

[논술고사 시간 : 2시간]

모집단위	학부·과	수험번호		성 명	

【 수험생 유의사항 】

1. 수험번호, 성명 등 자신의 신상과 관련된 사항을 답안에 드러낼 경우 부정행위로 간주함.
2. 문제지와 답안지의 문제번호가 일치하는지 반드시 확인할 것(불일치 시 0점 처리).
3. 풀이과정을 반드시 기술할 것. 기술의 형식과 내용은 평가의 주요 요소임.

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (85점)

1보다 큰 실수 a에 대하여, 다음 조건을 만족하는 $f(x)$를 구하여라.

(1) $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이다.
(2) $f(0)=0$, $f(a)=a^2$, $f(a^2)=a^4$ 이다.
(3) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=x^2$으로 둘러싸인 두 영역의 넓이가 같다.

[예시답안]

조건으로부터 $0, a, a^2$은 $f(x)-x^2=0$을 만족하는 서로 다른 세 개의 근이고, $f(x)$의 최고차항이 1이므로 $f(x)-x^2=x(x-a)(x-a^2)$이다. $f(x)$의 최고차항이 양수이고 $0<a<a^2$이므로 $y=f(x)$와 $y=x^2$로 둘러싸인 두 영역의 넓이는 각각 $\int_0^a \{f(x)-x^2\}\,dx$와 $\int_a^{a^2}\{x^2-f(x)\}\,dx$이다.

$$\int_0^a \{f(x)-x^2\}\,dx = \int_a^{a^2}\{x^2-f(x)\}\,dx$$

이므로

$$\int_0^a \{f(x)-x^2\}\,dx + \int_a^{a^2}\{f(x)-x^2\}\,dx = \int_0^{a^2}\{f(x)-x^2\}\,dx = \int_0^{a^2} x(x-a)(x-a^2)\,dx = 0$$

이다. 이를 계산하면

$$\int_0^{a^2} x(x-a)(x-a^2)\,dx = \int_0^{a^2}\{x^3-(a+a^2)x^2+a^3x\}\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{(a+a^2)}{3}x^3+\frac{a^3}{2}x^2\right]_0^{a^2}$$

$$=\left\{\frac{1}{4}a^8-\frac{(a+a^2)}{3}a^6+\frac{1}{2}a^7\right\} = \frac{1}{12}(3a^8-4a^7-4a^8+6a^7) = \frac{a^7(-a+2)}{12} = 0$$

이다. 따라서 $a=2$이고, $f(x)=x(x-2)(x-4)+x^2=x^3-5x^2+8x$이다.

[문제 2] (95점)

1부터 2^n까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 2^n개의 카드가 들어있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼냈을 때, 꺼낸 카드에 적힌 세 숫자가 공비가 2^k꼴(k는 자연수)인 등비수열을 이룰 확률을 구하여라. (단, n은 2 이상의 자연수이다.)

[예시답안]

이 상자에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼냈을 때, 가능한 모든 경우의 수는

$$ {}_{2^n}\mathrm{C}_3 = \frac{2^n(2^n-1)(2^n-2)}{6} $$

이다. 한편, 꺼낸 카드 3장에 적힌 세 숫자가 등비수열일 때 초항이 a이고 공비가 2^k이면, 세 숫자는 $a, 2^k a, 2^{2k}a$이다. 상자 안의 카드에는 각각 1부터 2^n까지의 자연수가 적혀 있으므로 $a \ge 1$이고 $2^{2k}a \le 2^n$, 즉, $1 \le a \le 2^{n-2k}$이다. 따라서 꺼낸 3장의 카드에 적힌 세 숫자가 공비가 2^k인 등비수열을 이루는 경우의 수는 2^{n-2k}이다.

(i) n이 2 이상의 짝수인 경우

n을 어떤 자연수 m에 대하여 $n=2m$으로 나타낼 수 있다. 이때, $2k \le n = 2m$, 즉,

$$ 1 \le k \le m $$

이어야 한다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 경우의 수는

$$ \sum_{k=1}^{m} 2^{n-2k} = \sum_{k=1}^{m} 2^{2m-2k} = \frac{4^m-1}{3} = \frac{2^n-1}{3} $$

이고, 구하는 확률은

$$ \frac{\dfrac{2^n-1}{3}}{\dfrac{2^n(2^n-1)(2^n-2)}{6}} = \frac{2}{2^n(2^n-2)} = \frac{1}{2^n(2^{n-1}-1)} $$

이다.

(ii) n이 2 이상의 홀수인 경우

n을 어떤 자연수 m에 대하여 $n=2m+1$로 나타낼 수 있다. 이때, $2k \le n = 2m+1$, 즉,

$$ 1 \le k \le m + \frac{1}{2} $$

이어야 한다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 경우의 수는

$$ \sum_{k=1}^{m} 2^{n-2k} = \sum_{k=1}^{m} 2^{2m+1-2k} = \frac{2(4^m-1)}{3} = \frac{2(2^{n-1}-1)}{3} $$

이고, 구하는 확률은

$$ \frac{\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{3}}{\dfrac{2^n(2^n-1)(2^n-2)}{6}} = \frac{4(2^{n-1}-1)}{2^n(2^n-1)(2^n-2)} = \frac{1}{2^{n-1}(2^n-1)} $$

이다.

[문제 3] (105점)

자연수 n에 대하여

$$a_n = \left\{ n\ln n - 2\ln\frac{(2n)!}{n!} \right\} \times \ln n, \quad b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln k)^2$$

이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n + b_n}{n}\right)$의 값을 구하여라.

[예시답안]

자연수 n에 대하여 자연로그의 성질을 이용하면

$$a_n = n(\ln n)^2 - 2\ln n \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k = \sum_{k=n+1}^{2n} \{(\ln n)^2 - 2(\ln n)(\ln k)\}$$

이므로,

$$a_n + b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln k - \ln n)^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} \left\{\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}^2$$

이다. 정적분과 급수의 합 사이의 관계로부터

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n + b_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}^2 = \int_0^1 \{\ln(1+x)\}^2\,dx$$

이다. 한편 부분적분법을 이용하면

$$\int_0^1 \{\ln(1+x)\}^2\,dx = \int_1^2 (\ln x)^2\,dx = \left[x(\ln x)^2\right]_1^2 - \int_1^2 \left(x \times \frac{2\ln x}{x}\right)dx = 2(\ln 2)^2 - 2\int_1^2 \ln x\,dx$$

이고

$$\int_1^2 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^2 = (2\ln 2 - 2) - (-1) = 2\ln 2 - 1$$

이므로

$$\int_0^1 \{\ln(1+x)\}^2\,dx = 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$$

이다. 따라서

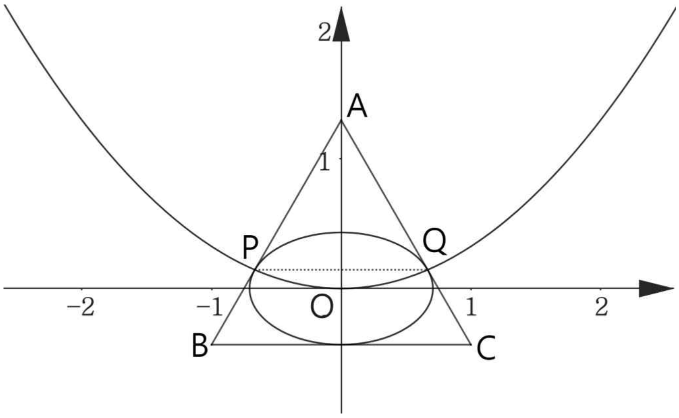
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n + b_n}{n}\right) = \int_0^1 \{\ln(1+x)\}^2\,dx = 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$$

이다.

[문제 4] (115점)

한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에 타원이 세 점에서 접하고 있다. 타원의 장축은 선분 BC와 평행하고, 장축의 길이는 $\sqrt{2}$이다. 두 선분 AB, AC 위에 있는 접점을 각각 P, Q라 하고, 타원의 중심을 O라 하자. 세 점 P, O, Q를 지나는 포물선이 정삼각형 ABC를 나눈 두 영역의 넓이 중에서 작은 값을 구하여라.

[예시답안]



장축의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 단축의 길이를 $2b$, 타원의 중심을 원점으로 하여 평면좌표를 도입하면 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(0, \sqrt{3}-b)$, $\mathrm{B}(-1, -b)$, $\mathrm{C}(1, -b)$이고 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이다. 접점 Q의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 Q에서의 접선의 방정식 $\dfrac{x_1 x}{a^2}+\dfrac{y_1 y}{b^2}=1$은 직선 AC의 방정식 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}-b$와 일치한다. 그러므로 $x_1=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{\sqrt{3}-b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-b)}$, $y_1=\dfrac{b^2}{\sqrt{3}-b}$이다. 점 Q는 타원 위의 점이므로 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$이다. 따라서, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이다. 이때, $x_1=\dfrac{2}{3}$, $y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$이다. 도형이 y축에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{12}\right)$이다.

세 점 P, O, Q를 지나는 포물선의 방정식은 $y=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}x^2$이다. 포물선 위에 있는 삼각형 내부의 넓이 S는 삼각형 APQ의 넓이 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$과 직선 PQ와 포물선으로 둘러싸인 영역의 넓이 $\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{12}-\frac{3\sqrt{3}}{16}x^2\right)dx=\frac{2\sqrt{3}}{27}$의 합이다. 그러므로 $S=\dfrac{14\sqrt{3}}{27}$이다. 삼각형 ABC의 넓이는 $\sqrt{3}$이므로 포물선 아래에 있는 삼각형 내부의 넓이는 $\sqrt{3}-S=\dfrac{13\sqrt{3}}{27}$이다. 그러므로 두 영역의 넓이 중에서 작은 값은 $\dfrac{13\sqrt{3}}{27}$이다.