2025학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (총 85점)

12보다 큰 자연수 중에서 12와 서로소인 수를 작은 수부터 차례로 나열할 때, k번째 값을 a_k라 하자.

(a) $a_k \geq 100$을 만족하는 자연수 k의 최솟값을 구하여라. (30점)

(b) 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{2n}(a_k a_{k+1} - a_{k+2})$를 구하여라. (55점)

[풀이]

(a) $12 = 2^2 \times 3$이므로 12와 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다. 임의의 자연수 n이 2 또는 3의 배수가 아니면 어떤 자연수 m에 대하여 $n = 6m+1$ 또는 $n = 6m+5$의 형태로 표현된다. 12보다 큰 자연수만을 고려하므로 $a_1 = 13$, $a_2 = 17$이다. 따라서 $a_{2m-1} = 6(m+1)+1$, $a_{2m} = 6(m+1)+5$이다. $a_{2m-1} = 6m+7 \geq 100$ 또는 $a_{2m} = 6m+11 \geq 100$을 만족하려면 $m \geq 15$이다. $a_{29} = 6 \times 15 + 7 = 97$, $a_{30} = 6 \times 15 + 11 = 101$이므로 $a_k \geq 100$을 만족하는 k의 최솟값은 30이다.

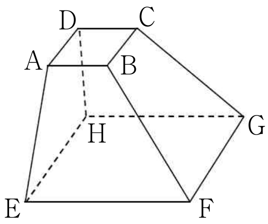
(b) (a)에 의하여 $a_{2m-1} = 6m+7$, $a_{2m} = 6m+11$이므로

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(a_k a_{k+1} - a_{k+2}) &= \sum_{m=1}^{n}\{(a_{2m-1}a_{2m} - a_{2m+1}) + (a_{2m}a_{2m+1} - a_{2m+2})\} \\
&= \sum_{m=1}^{n}\{(6m+7)(6m+11) - (6m+13) + (6m+11)(6m+13) - (6m+17)\} \\
&= \sum_{m=1}^{n}(72m^2 + 240m + 190) \\
&= 72\sum_{m=1}^{n} m^2 + 240\sum_{m=1}^{n} m + 190n \\
&= 72 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 240 \times \frac{n(n+1)}{2} + 190n \\
&= 2n(12n^2 + 78n + 161)
\end{aligned}$$

이다.

[문제 2] (95점)

밑면이 정사각형인 사각뿔을 밑면과 평행한 평면으로 잘라서 오른쪽 그림과 같은 육면체를 얻었다. 육면체에서 두 정사각형 ABCD와 EFGH의 한 변의 길이는 각각 a와 $a+2$이다. 또한 두 선분 AE와 DH의 길이는 모두 b이며, 두 선분 BF와 CG의 길이는 모두 c이다. 사각형 AEHD의 평면 BFGC 위로의 정사영의 넓이를 a, b, c에 대한 식으로 나타내어라. (단, $a>0$, $b>1$, $c>1$이고 $b^2+c^2 \geq 6$이다.)



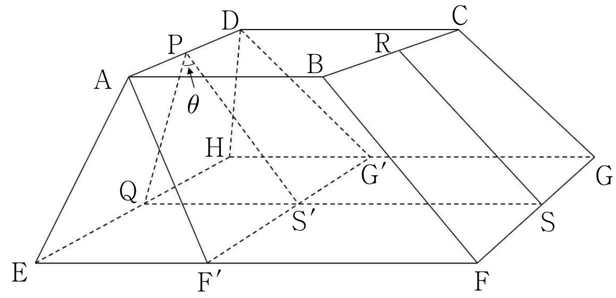
[풀이]

선분 AD의 중점을 P, 선분 EH의 중점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 p라 하면,

$p^2+\left\{\dfrac{(a+2)-a}{2}\right\}^2=b^2$이므로 $p=\sqrt{b^2-1}$이다.

선분 BC의 중점을 R, 선분 FG의 중점을 S라 할 때, 선분 RS의 길이를 q라 하면,

$q^2+\left\{\dfrac{(a+2)-a}{2}\right\}^2=c^2$이므로 $q=\sqrt{c^2-1}$이다.



그림과 같이 선분 AD를 포함하고 평면 BFGC와 평행한 평면 AF′G′D를 생각하자. 이때 선분 F′G′의 중점을 S′이라 하고 각 QPS′의 크기를 θ라 하자. 삼각형 PQS′에서 코사인법칙에 의해

$$\{(a+2)-a\}^2=p^2+q^2-2pq\cos\theta$$

이므로 $\cos\theta=\dfrac{p^2+q^2-4}{2pq}=\dfrac{b^2+c^2-6}{2pq}\geq 0$이다. 따라서 $0<\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$이다. 또한 각 APQ와 각 APS′은 직각이므로 두 평면 AEHD와 BFGC가 이루는 각의 크기는 θ와 같다.

사각형 AEHD는 사다리꼴이므로 넓이는 $\dfrac{1}{2}p(a+a+2)=p(a+1)$이다. 따라서 사각형 AEHD의 평면 BFGC 위로의 정사영의 넓이는

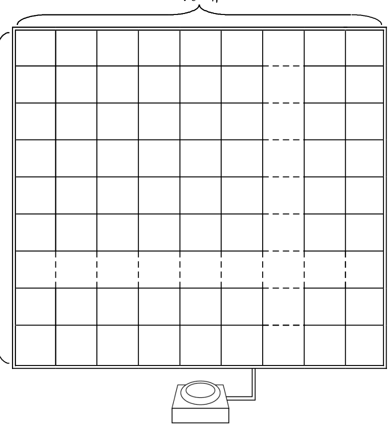
$$\begin{aligned}(\text{사각형 AEHD의 넓이})\times\cos\theta&=p(a+1)\times\frac{b^2+c^2-6}{2pq}\\&=\frac{(a+1)(b^2+c^2-6)}{2\sqrt{c^2-1}}\end{aligned}$$

이다.

[문제 3] (총 105점)

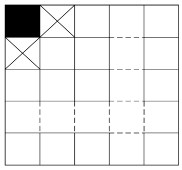
그림과 같이 n^2개의 영역으로 이루어진 한 개의 전광판이 있다. 이 전광판에 연결된 버튼을 이용하여 서울이와 시립이가 다음과 같은 규칙으로 게임을 하려고 한다. (단, n은 3 이상의 자연수이다.)

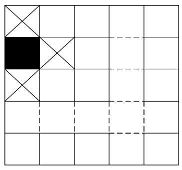
(1) 게임을 시작할 때, 전광판의 모든 영역은 불이 꺼져있다.
(2) 게임이 끝날 때까지 두 사람이 버튼을 번갈아 누른다.
(3) 한 사람이 버튼을 누르면 불이 꺼져있는 영역 중 임의의 한 영역에 불이 켜지며, 이때 불이 켜진 영역은 버튼을 누른 사람의 소유가 된다.
(4) 한 사람이 버튼을 눌렀을 때, 상대방이 소유한 영역과 한 모서리를 공유하는 영역에 불이 켜지면, 이때 버튼을 누른 사람이 승리하고 게임이 끝난다.

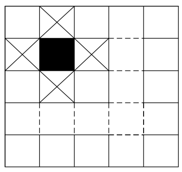


서울이부터 게임을 시작하여 진행할 때, 다음 물음에 답하여라.
(a) 시립이가 버튼을 한 번 눌러서 승리할 확률을 구하여라. (40점)
(b) 서울이가 버튼을 두 번 눌러서 승리할 확률을 구하여라. (65점)

[풀이] (a) 시립이가 버튼을 한 번 눌러서 승리하는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.


(i)


(ii)


(iii)

(i) 서울이가 소유한 영역(■)과 한 모서리를 공유하는 영역(☒)이 2개인 경우
그림과 같이 위 조건을 만족하는 영역은 4개이므로 시립이가 승리할 경우의 수는 $4\times 2=8$이다.

(ii) 서울이가 소유한 영역(■)과 한 모서리를 공유하는 영역(☒)이 3개인 경우
그림과 같이 위 조건을 만족하는 영역은 $4\times(n-2)$개이므로 시립이가 승리할 경우의 수는 $4(n-2)\times 3$이다.

(iii) 서울이가 소유한 영역(■)과 한 모서리를 공유하는 영역(☒)이 4개인 경우
그림과 같이 위 조건을 만족하는 영역은 $(n-2)^2$개이므로 시립이가 승리할 경우의 수는 $(n-2)^2\times 4$이다.

따라서 확률의 덧셈정리에 의해 구하는 확률은 $\dfrac{8}{n^2(n^2-1)}+\dfrac{12(n-2)}{n^2(n^2-1)}+\dfrac{4(n-2)^2}{n^2(n^2-1)}=\dfrac{4}{n(n+1)}$이다.

(b) 서울이가 버튼을 두 번 눌러서 승리하려면, 시립이가 버튼을 한 번 눌러서 승리하지 않아야 한다. (a)와 같은 방법으로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 시립이가 소유한 영역과 한 모서리를 공유하는 영역이 2개인 경우
위 조건을 만족하는 영역은 4개다. 이때 서울이가 첫 번째로 소유한 영역은 시립이가 소유한 영역이 아니면서 시립이가 소유한 영역과 모서리를 공유하지 않는 n^2-3개의 영역 중 하나여야 한다. 또한 서울이가 두 번째로 소유하는 영역이 시립이가 소유한 영역과 한 모서리를 공유하는 2개의 영역 중 하나여야 한다. 따라서 서울이가 버튼을 두 번 눌러서 승리할 경우의 수는 $4\times(n^2-3)\times 2=8(n^2-3)$이다.

(ii) 시립이가 소유한 영역과 한 모서리를 공유하는 영역이 3개인 경우
(i)과 같은 방법으로 계산하면 서울이가 버튼을 두 번 눌러서 승리할 경우의 수는 $4(n-2)\times(n^2-4)\times 3$ $=12(n-2)^2(n+2)$이다.

(iii) 시립이가 소유한 영역과 한 모서리를 공유하는 영역이 4개인 경우
(i)과 같은 방법으로 계산하면 서울이가 버튼을 두 번 눌러서 승리할 경우의 수는 $(n-2)^2\times(n^2-5)\times 4$ $=4(n-2)^2(n^2-5)$이다.

따라서 확률의 덧셈정리에 의해 구하는 확률은 다음과 같다.

$$\frac{8(n^2-3)}{n^2(n^2-1)(n^2-2)}+\frac{12(n-2)^2(n+2)}{n^2(n^2-1)(n^2-2)}+\frac{4(n-2)^2(n^2-5)}{n^2(n^2-1)(n^2-2)}=\frac{4(n^4-n^3-5n^2+8n-2)}{n^2(n^2-1)(n^2-2)}$$

[문제 4] (115점)

자연수 n에 대하여

$$T_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{n^2} \int_0^{k\pi} \left| \sin \frac{x}{2n} \right| dx$$

라 할 때, $\lim_{n \to \infty} T_n$의 값을 구하여라.

[풀이]

먼저 자연수 $k = 1, 2, \cdots, 3n$에 대해 적분값

$$\int_0^{k\pi} \left| \sin \frac{x}{2n} \right| dx$$

을 구하자.

(i) $k = 1, 2, \cdots, 2n$인 경우

$0 \le x \le 2n\pi$에서 $\sin \frac{x}{2n} \ge 0$이므로

$$\int_0^{k\pi} \left| \sin \frac{x}{2n} \right| dx = \int_0^{k\pi} \sin \frac{x}{2n} dx = \left[-2n \cos \frac{x}{2n} \right]_0^{k\pi} = 2n\left(1 - \cos \frac{k\pi}{2n}\right)$$

이다.

(ii) $k = 2n+1, 2n+2, \cdots, 3n$인 경우

$0 \le x < 2n\pi$에서 $\sin \frac{x}{2n} \ge 0$이고, $2n\pi \le x \le 3n\pi$에서 $\sin \frac{x}{2n} \le 0$이므로

$$\int_0^{k\pi} \left| \sin \frac{x}{2n} \right| dx = \int_0^{2n\pi} \sin \frac{x}{2n} dx + \int_{2n\pi}^{k\pi} \left(-\sin \frac{x}{2n}\right) dx = \left[-2n \cos \frac{x}{2n} \right]_0^{2n\pi} + \left[2n \cos \frac{x}{2n} \right]_{2n\pi}^{k\pi} = 2n\left(3 + \cos \frac{k\pi}{2n}\right)$$

이다.

위 (i)과 (ii)에 의해

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \left\{ \int_0^{k\pi} \left| \sin \frac{x}{2n} \right| dx + \int_0^{(n+k)\pi} \left| \sin \frac{x}{2n} \right| dx + \int_0^{(2n+k)\pi} \left| \sin \frac{x}{2n} \right| dx \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left[2\left(1 - \cos \frac{k\pi}{2n}\right) + 2\left\{1 - \cos \frac{(n+k)\pi}{2n}\right\} + 2\left\{3 + \cos \frac{(2n+k)\pi}{2n}\right\} \right] \\ &= 10 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(-4\cos \frac{k\pi}{2n} + 2\sin \frac{k\pi}{2n} \right) \end{aligned}$$

이다. 따라서 정적분과 급수의 합 사이의 관계로부터

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} T_n &= 10 + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(-4\cos \frac{k\pi}{2n} + 2\sin \frac{k\pi}{2n} \right) \\ &= 10 + \int_0^1 \left(-4\cos \frac{\pi}{2}x + 2\sin \frac{\pi}{2}x \right) dx \\ &= 10 + \left[-\frac{8}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x \right]_0^1 = 10 - \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

이다.