2024학년도 수시모집 논술전형

모의 논술고사 해설지 (자연계열)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (85점)

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$$f(x+2\pi)=f(x)+|\cos 3x|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2n}\displaystyle\int_0^{2n\pi} f(x)\,dx$라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{2024} a_n$의 값을 구하여라.

[예시답안]

$|\cos 3x|$와 $\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$는 주기가 각각 $\dfrac{\pi}{3}$, 2π 이므로 문제의 조건을 여러 번 적용하면

$$f(x+2k\pi)=f(x)+k\left(|\cos 3x|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)\quad (\text{단, } k\text{는 자연수})$$

이다. 이제 $A=\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$라 두자.

$$\int_0^{2\pi}\left(|\cos 3x|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)dx=8$$

이므로

$$\int_0^{2n\pi} f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{2\pi(k-1)}^{2\pi k} f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} f(x+2\pi(k-1))\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi}\left(f(x)+(k-1)\left(|\cos 3x|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)\right)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(A+8(k-1))=nA+4n(n-1)$$

이다. 따라서 $a_n=(-1)^n\left(\dfrac{A}{2}+2(n-1)\right)$이며,

$$\sum_{n=1}^{2024} a_n=\sum_{n=1}^{1012} a_{2n}+\sum_{n=1}^{1012} a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{1012}\left(\frac{A}{2}+2(2n-1)\right)-\sum_{n=1}^{1012}\left(\frac{A}{2}+2(2n-2)\right)=\sum_{n=1}^{1012}2=2024.$$

[채점기준]

- $f(x+2k\pi)=f(x)+k\left(|\cos 3x|+\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|\right)$를 유도하면 20점
- $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(|\cos 3x|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)dx=8$를 계산하면 20점
- $a_n=(-1)^n\left(\dfrac{A}{2}+2(n-1)\right)$을 얻으면 20점
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{2024} a_n$을 구하면 25점

[문제 2] (총 95점)
빨간 공 6개와 파란 공 4개를 서로 다른 세 상자에 나누어 넣으려고 한다. (단, 빨간 공들은 서로 구별할 수 없고 파란 공들도 서로 구별할 수 없다.)

(a) 나누어 넣는 경우의 수를 구하여라. (40점)
(b) 모든 상자에서 빨간 공의 개수가 파란 공의 개수보다 같거나 많도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하여라. (55점)

[예시답안]
(a) 세 상자를 각각 상자 1, 상자 2, 상자 3이라 하자. $i=1,2,3$에 대하여, 상자 i에 넣은 빨간 공의 수와 파란 공의 수를 각각 x_i, y_i라 하자. 각 상자에 빨간 공을 넣는 경우의 수는 아래 방정식의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

$$x_1+x_2+x_3=6$$

또한, 각 상자에 파란 공을 넣는 경우의 수는 아래 방정식의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

$$y_1+y_2+y_3=4$$

위 두 방정식으로부터, 각 상자에 빨간 공을 넣는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_6$이며, 각 상자에 파란 공을 넣는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_6 \cdot {}_3\mathrm{H}_4 = {}_8\mathrm{C}_6 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 = 28 \cdot 15 = 420$이다.

(b) $i=1,2,3$에 대하여, z_i를 상자 i에 넣은 빨간 공의 개수에서 파란 공의 개수를 뺀 값이라 하자. 즉 $z_i = x_i - y_i$이다. $z_i \ge 0\ (i=1,2,3)$일 때 모든 상자에서 빨간 공의 개수가 파란 공의 개수보다 같거나 많다. 따라서 구하는 경우의 수는 아래 방정식의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

$$y_1+y_2+y_3=4$$
$$z_1+z_2+z_3=2$$

위 첫 번째 방정식의 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4$이며, 두 번째 방정식의 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4 \cdot {}_3\mathrm{H}_2 = {}_6\mathrm{C}_4 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 = 15 \cdot 6 = 90$이다.

[채점기준]
(a) (40점)
- 빨간 공을 넣는 경우의 수를 구하면 15점
- 파란 공을 넣는 경우의 수를 구하면 15점
- 구하는 경우의 수를 구하면 10점
(b) (55점)
- 조건에 맞는 빨간 공을 넣는 경우의 수를 구하면 35점
- 구하는 경우의 수를 구하면 20점

[문제 3] (105점)

함수 $f(t)=e^t\ln\left(e^{3t}-2e^t+e^{-t}\right)$의 정의역을 구하고, 정적분 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(t)\,dt$의 값을 구하여라.

[예시답안]

$t\neq 0$이면 $e^{3t}-2e^t+e^{-t}=e^{-t}(e^{4t}-2e^{2t}+1)=e^{-t}(e^{2t}-1)^2>0$이다. 따라서 함수 $f(t)=e^t\ln\left(e^{3t}-2e^t+e^{-t}\right)$의 정의역은 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$이다.

$x=e^t$으로 치환하면

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(t)\,dt=\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^t\ln\left(e^{3t}-2e^t+e^{-t}\right)dt=\int_2^3 \ln\left(x^3-2x+x^{-1}\right)dx$$

이다. $\ln xy=\ln x+\ln y$을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_2^3 \ln\left(x^3-2x+x^{-1}\right)dx&=\int_2^3 \ln\left\{x^{-1}\left(x^4-2x^2+1\right)\right\}dx\\&=\int_2^3\left\{\ln\left(x^{-1}\right)+\ln\left(x^4-2x^2+1\right)\right\}dx\end{aligned}$$

이다. $\ln x^a=a\ln x$과 부분적분을 이용하면

$$\int_2^3 \ln\left(x^{-1}\right)dx=-\int_2^3 \ln x\,dx=-\left[x\ln x\right]_2^3+\int_2^3 1\,dx=-3\ln 3+2\ln 2+1$$

$$\begin{aligned}\int_2^3 \ln\left(x^4-2x^2+1\right)dx&=\int_2^3 \ln\left\{(x-1)^2(x+1)^2\right\}dx\\&=2\int_2^3 \ln(x-1)\,dx+2\int_2^3 \ln(x+1)\,dx\end{aligned}$$

을 얻는다. 부분적분을 이용하면

$$\int_2^3 \ln(x-1)\,dx=\left[(x-1)\ln(x-1)\right]_2^3-\int_2^3 1\,dx=2\ln 2-1\ln 1-1=2\ln 2-1$$

$$\int_2^3 \ln(x+1)\,dx=\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_2^3-\int_2^3 1\,dx=4\ln 4-3\ln 3-1=8\ln 2-3\ln 3-1$$

이다. 정리하면

$$\begin{aligned}\int_2^3 \ln\left(x^3-2x+x^{-1}\right)dx&=\int_2^3\left\{\ln\left(x^{-1}\right)+\ln\left(x^4-2x^2+1\right)\right\}dx\\&=-3\ln 3+2\ln 2+1+2(2\ln 2-1)+2(8\ln 2-3\ln 3-1)\\&=22\ln 2-9\ln 3-3\end{aligned}$$

를 얻는다.

[채점기준]

- 정의역을 구하면 30점
- 치환적분을 적용하여 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(t)\,dt=\int_2^3 \ln\left(x^3-2x+x^{-1}\right)dx$를 유도하면 20점
- 로그함수의 성질을 이용해서 주어진 식을 정리하면 30점
- 부분적분을 이용해서 주어진 정적분의 값을 계산하면 25점

[문제 4] (총 115점)

쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - y^2 = -1$의 두 초점 F_1, F_2와 이 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여, 두 평면벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PF}_1}$과 $\overrightarrow{\mathrm{PF}_2}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(x)$라고 하자. (단, 점 P는 제1사분면에 있다.)

(a) $\cos(\theta(x)) = \frac{f(x)}{g(x)}$을 만족시키는 다항식 $f(x)$와 $g(x)$를 구하여라. (40점)

(b) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_1}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_2}\right| = 8$ 을 만족시키는 x에 대하여, $\theta'(x)$의 값을 구하여라. (75점)

[예시답안]

(a) 두 초점을 $\mathrm{F}_1 = (0, \sqrt{3})$과 $\mathrm{F}_2 = (0, -\sqrt{3})$라 두면 제1사분면 위의 점 $\mathrm{P}\left(x, \sqrt{\frac{x^2}{2}+1}\right)$에 대해 $\overrightarrow{\mathrm{PF}_1} = \left(-x, -\sqrt{\frac{x^2}{2}+1} + \sqrt{3}\right)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{PF}_2} = \left(-x, -\sqrt{\frac{x^2}{2}+1} - \sqrt{3}\right)$이다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PF}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PF}_2} = \frac{3}{2}x^2 - 2$이고

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_1}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}x^2+4\right) - 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{2}x^2+4\right) + 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}} = \sqrt{\frac{9}{4}x^4 + 6x^2 + 4} = \frac{3}{2}x^2 + 2$$

이다. $\overrightarrow{\mathrm{PF}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PF}_2} = \left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_1}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_2}\right| \cos(\theta(x))$로부터

$$\cos(\theta(x)) = \frac{3x^2-4}{3x^2+4} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

이므로, $f(x) = 3x^2 - 4$, $g(x) = 3x^2 + 4$라 두면 된다.

(b) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_1}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_2}\right| = 8$ 이고 쌍곡선의 성질에 의해서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_2}\right| - \left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_1}\right| = 2$이므로 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_1}\right| = 3$이고 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_2}\right| = 5$이다. $\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_1}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_2}\right| = \frac{3}{2}x^2 + 2$로부터 $\frac{3}{2}x^2 + 2 = 15$이다. 점 P가 제1사분면에 있으므로 $x = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$이다. 따라서 (*)로부터 $\cos\left(\theta\left(\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{11}{15}$ 이고 $\sin\left(\theta\left(\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2\sqrt{26}}{15}$이다. 따라서 (*)의 양변을 미분하면

$$-\sin(\theta(x)) \cdot \theta'(x) = \frac{48x}{(3x^2+4)^2}$$

이므로

$$\theta'\left(\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-2}{5\sqrt{3}}$$

이다.

[채점기준]

(a) (40점)

- 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PF}_1}$과 $\overrightarrow{\mathrm{PF}_2}$의 성분을 구하면 10점
- 내적의 성질을 이용해서 $\cos(\theta(x)) = \frac{3x^2-4}{3x^2+4}$을 유도하면 30점

(b) (75점)

- 쌍곡선의 성질을 이용해서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_1}\right|$와 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PF}_2}\right|$를 구하면 15점
- 조건을 만족하는 x의 값을 구하면 20점
- 합성함수의 미분법을 이용해서 $\theta'\left(\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)$를 계산하면 40점