2024학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (85점)
두 곡선 $y = x^4 - 2x^2 + 1$과 $y = -x^2 + x + 2$가 만나는 두 점 중 x좌표가 음수인 점을 P, x좌표가 양수인 점을 Q라 하자. 점 A$(0, -1)$에 대하여 $k \le \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} < k+1$을 만족시키는 정수 k를 구하여라.

[예시답안]
$y = x^4 - 2x^2 + 1$과 $y = -x^2 + x + 2$를 연립하면 $x^4 - x^2 - x - 1 = (x+1)(x^3 - x^2 - 1) = 0$이므로 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$이다. 또한

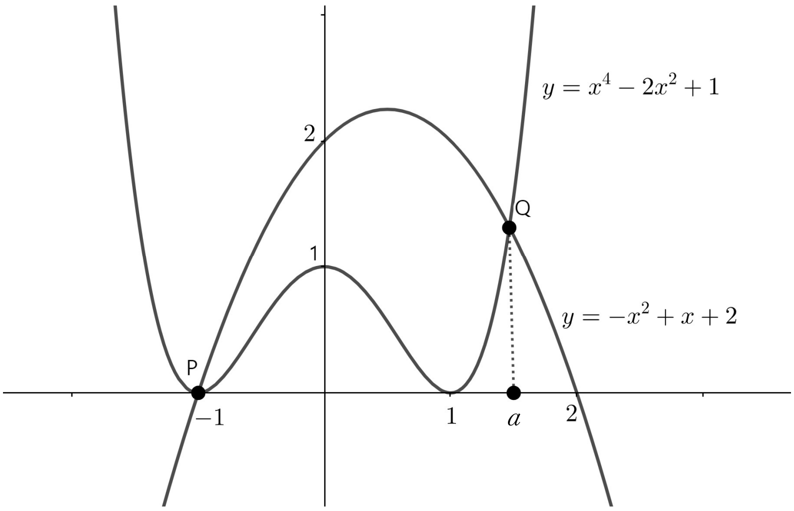
$$f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

라 두면 $f'(x) = 3x^2 - 2x$이다. 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극댓값 -1을 가지므로 $f(x) = 0$은 단 하나의 실근을 가진다. 그 실근을 a라 하면 점 Q의 좌표는 $(a, -a^2 + a + 2)$이다. $y = x^4 - 2x^2 + 1$과 $y = -x^2 + x + 2$의 그래프로부터 a의 범위는 $1 < a < 2$이다.

한편, 주어진 내적은

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} = (\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) = (a+1, -a^2 + a + 2) \cdot (1, -1) = a^2 - 1$$

이다. 따라서 $0 < \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} < 3$이고 구하는 정수 k는 0, 1, 2 중 하나이다. $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3 = \sqrt{8} - \sqrt{9} < 0$이고 $f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 4 = \sqrt{27} - \sqrt{16} > 0$이므로 사잇값 정리에 의해 $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$이다. 따라서 $1 \le \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} < 2$이고 $k = 1$이다.



[채점기준]
1. 점 P와 Q의 좌표를 표현한다. (20점)
2. 두 함수의 그래프를 이용해서 Q의 x좌표 a의 범위를 구한다. (20점)
3. $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}}$을 a로 표현한다. (20점)
4. 사잇값 정리를 이용해 구하는 k의 값을 계산한다. (25점)

[문제 2] (총 95점)
서울이, 시립이, 대학이는 과일가게에서 사과와 배를 사려고 한다. 세 사람 중 과일을 사지 않은 사람이 있을 수도 있을 때, 다음 경우의 수를 구하여라. (단, 사과와 배는 각각 11개 이상이고, 같은 종류의 과일은 서로 구별하지 않는다.)
(a) 서울이, 시립이, 대학이가 모두 합해서 11개의 과일을 사는 경우의 수를 구하여라. (40점)
(b) 서울이, 시립이, 대학이가 산 과일의 수를 차례로 x, y, z라 하자. 이때 (a)의 경우 중 $x \le y \le z$를 만족시키는 경우의 수를 구하여라. (55점)

[예시답안]
(a) 서울이, 시립이, 대학이가 산 사과의 수를 차례로 x_1, y_1, z_1이라 하자. 또한, 서울이, 시립이, 대학이가 산 배의 수를 차례로 x_2, y_2, z_2라 하자. 구하는 경우의 수는 방정식 $x_1+y_1+z_1+x_2+y_2+z_2=11$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으며 그 값은 ${}_6\mathrm{H}_{11}=4368$이다.

(b) 어떤 사람이 사과와 배 중에서 m개의 과일을 사는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_m$이다. (a)의 경우 중 서울이, 시립이, 대학이가 산 과일의 수가 차례로 x, y, z인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_x \times {}_2\mathrm{H}_y \times {}_2\mathrm{H}_z=(x+1)(y+1)(z+1)$이다. 다음과 같이 x, y, z가 $x \le y \le z$를 만족시키는 경우를 나누자.

(i) $x=y=z$인 경우는 없다.

(ii) $x=y<z$일 때, (x, y, z)의 경우를 모두 찾으면, $(0, 0, 11)$, $(1, 1, 9)$, $(2, 2, 7)$, $(3, 3, 5)$이다. (a)의 경우 중 (x, y, z)가 $(0, 0, 11)$, $(1, 1, 9)$, $(2, 2, 7)$, $(3, 3, 5)$를 만족시키는 경우의 수는 차례로 12, 40, 72, 96이다.

(iii) $x<y=z$일 때, (x, y, z)의 경우를 모두 찾으면, $(1, 5, 5)$, $(3, 4, 4)$이다. (a)의 경우 중 (x, y, z)가 $(1, 5, 5)$, $(3, 4, 4)$를 만족시키는 경우의 수는 차례로 72, 100이다.

(iv) $x<y<z$일 때, (a)의 경우 중 이 조건을 만족시키는 경우의 수는 x, y, z가 서로 다른 경우를 모두 찾아 $3!=6$으로 나눈 값과 같다. x, y, z 중 세 개가 같은 경우의 수는 (i)에 의해 0이고, 두 개가 같은 경우의 수는 (ii), (iii)에 의해 392이므로, (a)의 경우 중에서 x, y, z가 모두 다른 경우의 수는 $4368-0\times1-392\times3=3192$이다. 따라서, (a)의 경우 중 $x<y<z$를 만족시키는 경우의 수는 532이다.

(i), (ii), (iii), (iv)로부터 구하는 경우의 수는 $0+220+172+532=924$이다.

[채점기준]
(a)
1. 구하는 경우의 수를 찾기 위해 음이 아닌 정수해를 가지는 방정식을 세운다. (30점)
2. 중복조합을 이용해 경우의 수를 계산한다. (10점)

(b)
1. 조건을 만족하는 경우를 나눈다. (20점)
2. 중복조합을 이용해 경우의 수를 계산한다. (35점)

[문제 3] (105점)
자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 두 정수의 순서쌍 (a, b)의 개수를 A_n이라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $-\vert x-2\vert \le ax+b \le \vert x-2n\vert+5$이다.

이때 $\sum_{n=1}^{100} A_n$의 값을 구하여라.

[예시답안]
주어진 조건으로부터 $x \ge 2n$일 때, $\frac{-(x-2)}{x} \le \frac{ax+b}{x} \le \frac{(x-2n)+5}{x}$이다. 함수의 극한의 대소관계에 따라

$$-1=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-(x-2)}{x}\right)\le a=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{x}\right)\le \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-2n)+5}{x}\right)=1$$

이므로 $-1 \le a \le 1$이다. 즉 가능한 정수 a는 -1, 0, 1뿐이다.

(i) $a=0$인 경우
함수 $y=-|x-2|$의 최댓값은 0이고, 함수 $y=|x-2n|+5$의 최솟값은 5이므로, $0 \le b \le 5$이다. 모든 실수 x에 대하여 $-|x-2| \le b \le |x-2n|+5$가 성립하는 정수 b의 개수는 6이다.

(ii) $a=-1$인 경우
모든 실수 x에 대하여 $x-|x-2| \le b \le x+|x-2n|+5$를 만족시키는 정수 b를 찾자. $x \ge 2$이면 $x-|x-2|=2$이고, $x<2$이면 $x-|x-2|=2x-2$이므로, 함수 $y=x-|x-2|$의 최댓값은 2이다. 마찬가지로, $x \ge 2n$인 경우와 $x<2n$인 경우로 나누어서 생각하면, 함수 $y=x+|x-2n|+5$의 최솟값은 $2n+5$이다. 따라서, $2 \le b \le 2n+5$이고 모든 실수 x에 대하여 $x-|x-2| \le b \le x+|x-2n|+5$를 만족시키는 정수 b의 개수는 $2n+4$이다.

(iii) $a=1$인 경우
$a=-1$인 경우와 마찬가지로, 함수 $y=-x-|x-2|$의 최댓값은 -2이고, 함수 $y=-x+|x-2n|+5$의 최솟값은 $5-2n$이다. 모든 실수 x에 대하여 $-x-|x-2| \le b \le -x+|x-2n|+5$를 만족시키는 정수 b의 개수를 n의 값에 따라 구해보면 다음과 같다.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n \ge 4$
정수 b의 개수	6	4	2	0

그러므로

$$\sum_{n=1}^{100} A_n = \sum_{n=1}^{100} 6 + \sum_{n=1}^{100}(2n+4) + (6+4+2) = 11112$$

이다.

[채점기준]
1. 가능한 a를 모두 찾는다. (30점)
2. $a=0$인 경우에 수열의 합으로 가능한 b의 개수를 찾는다. (20점)
3. $a=-1$인 경우에 수열의 합으로 가능한 b의 개수를 찾는다. (25점)
4. $a=1$인 경우에 가능한 b의 개수를 찾는다. (20점)
5. 각 경우를 모두 더한다. (10점)

[문제 4] (총 115점)

2 이상의 자연수 n에 대하여 점 A_k의 좌표를 $\left(\cos\left(\frac{k-1}{n}\pi\right), \sin\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\right)$라 하자. (단, $k=1, 2, \cdots, 2n$)
점 A_1, A_2, $\cdots$, A_{2n}을 꼭짓점으로 하는 정$2n$각형의 변 위를 두 점 P, Q가 시계 반대 방향으로 움직인다.
두 점 P, Q가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 P, Q는 시각 $t=0$일 때 점 $\mathrm{A}_1(1, 0)$을 출발하여 정$2n$각형을 한 바퀴 돌아 점 A_1에 동시에 도착한다.
(2) 점 P는 변 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ 위를 속력 $\sqrt{2-\frac{k}{2n}}$로 움직이고, 변 $\mathrm{A}_{2n}\mathrm{A}_1$ 위를 속력 1로 움직인다. (단, $k=1, 2, \cdots, 2n-1$)
(3) 점 Q의 속력은 일정하다.

(a) 점 P가 출발한 후 점 A_1에 처음으로 도착하는 시각을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값을 구하여라. (50점)

(b) 점 P가 출발한 후 점 $\mathrm{A}_{n+1}(-1, 0)$에 처음으로 도착하는 시각을 c_n이라 하자. 시각 $t=0$에서 $t=c_n$까지 점 P와 점 Q가 움직인 거리의 차를 d_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} d_n$의 값을 구하여라. (65점)

[예시답안]

(a) 정$2n$각형의 한 변의 길이를 l_n이라 하자. 점 P가 k번째 변 위를 움직이는 데 걸리는 시간은 $\frac{l_n}{\sqrt{2-\frac{k}{2n}}}$이므로

$b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{l_n}{\sqrt{2-\frac{k}{2n}}}$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{l_n}{\sqrt{2-\frac{k}{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\left(2n\,l_n \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2-\frac{k}{2n}}}\,\frac{1}{2n}\right)$이다.

한편, $l_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$이므로 $\lim_{n\to\infty} 2n\,l_n = \lim_{n\to\infty} 2\pi\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}} = 2\pi$이다. 또한 정적분과 급수의 합 사이의 관계로부터

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2-\frac{k}{2n}}}\,\frac{1}{2n} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = 2(\sqrt{2}-1)$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} b_n = 4(\sqrt{2}-1)\pi$이다.

(b) 시각 $t=c_n$까지 점 P가 움직인 거리는 $n\,l_n$이다. 점 Q의 속력은 $\frac{2n\,l_n}{b_n}$이므로, 시각 $t=c_n$까지 점 Q가 움직인 거리는 $\frac{2n\,l_n c_n}{b_n}$이다. 따라서 $d_n = n\,l_n - \frac{2n\,l_n c_n}{b_n}$이다. 한편 (a)에서 $\lim_{n\to\infty} 2n\,l_n = 2\pi$이고, $\lim_{n\to\infty} b_n = 4(\sqrt{2}-1)\pi$이다. 정적분과 급수의 합 사이의 관계로부터

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{l_n}{\sqrt{2-\frac{k}{2n}}} = \lim_{n\to\infty} n\,l_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2-\frac{k}{2n}}}\,\frac{1}{n} = \pi\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-\frac{x}{2}}}\,dx = 2(2\sqrt{2}-\sqrt{6})\pi$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \pi - \frac{4(2\sqrt{2}-\sqrt{6})\pi^2}{4(\sqrt{2}-1)\pi} = \pi - \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})\pi}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{6}-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\pi = (\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-3)\pi$$

이다.

[채점기준]

(a)

1. b_n을 구한다. (20점)
2. 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용해 $\lim_{n \to \infty} b_n$을 구한다. (30점)

(b)

1. d_n을 구한다. (25점)
2. 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용해 $\lim_{n \to \infty} c_n$을 구한다. (30점)
3. $\lim_{n \to \infty} d_n$을 구한다. (10점)