2023학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열 II)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (85점)

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이면서 다음을 만족시키는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P의 개수가 2가 되도록 하는 실수 a, b의 조건을 구하여라.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(p,q)$에서의 접선을 l_1이라 하고, 점 P를 지나고 직선 l_1에 수직인 직선을 l_2라 하자. 직선 l_2와 y축의 교점을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=2\lvert p\rvert>0$이다.

[예시답안]

$f'(x)=3x^2+2ax+b$가 모든 x에 대해 0이 아니므로, 모든 x에 대해 $f'(x)>0$이다. 따라서, $a^2-3b<0$이다. 또한, 직선 l_2는 $y=-\dfrac{1}{3p^2+2ap+b}(x-p)+q$이며, 점 Q는 $\left(0, \dfrac{p}{3p^2+2ap+b}+q\right)$이다. 문제의 조건에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\lvert p\rvert$를 만족시켜야 하므로

$$\sqrt{p^2+\frac{p^2}{(3p^2+2ap+b)^2}}=2\lvert p\rvert$$

가 성립한다. 조건에서 $p\neq 0$이므로 위 식을 정리하면 $3p^2+2ap+b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다. 또한 $f'(p)=3p^2+2ap+b>0$이므로 $3p^2+2ap+b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다. 이 이차방정식의 해가 서로 다른 두 실근일 조건은 $a^2-3b>-\sqrt{3}$이다.

한편, $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이면 이차방정식 $3p^2+2ap+b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$의 한 근이 $p=0$이므로 주어진 조건을 만족시키는 점 P는 하나만 존재한다. 따라서 구하는 조건은

$$-\sqrt{3}<a^2-3b<0,\ b\neq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이다.

[문제 2] (95점)

세 점 P, Q, R은 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 세 변 위를 시계 반대 방향으로 움직인다. 세 점 P, Q, R은 시각 $t=0$일 때 한 꼭짓점에서 동시에 출발하며 순서대로 $1, \sqrt{2}, 2$의 일정한 속력으로 움직인다. 시각 $t=\sqrt{2}$에서 시각 $t=2$까지 세 점 P, Q, R이 움직일 때, 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 되는 시각과 최소가 되는 시각을 각각 구하여라.

[예시답안]

$\sqrt{2} \le t \le 2$에 대하여 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하자. $t=\frac{3}{2}$일 때 점 R이 삼각형의 한 꼭짓점에 있으므로 $\sqrt{2} \le t \le \frac{3}{2}$와 $\frac{3}{2} \le t \le 2$로 나누어 $S(t)$를 구한다.

(i) $\sqrt{2} \le t \le \frac{3}{2}$인 경우

$\sqrt{2} \le t \le \frac{3}{2}$인 경우 세 점 P, Q, R은 아래의 그림처럼 위치하게 된다. 따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}(2t-\sqrt{2}t)(2-t)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{4}(-t^2+2t)$$

이다. 따라서 주어진 구간에서 $S(t)$는 감소한다.

(ii) $\frac{3}{2} \le t \le 2$인 경우

$\frac{3}{2} \le t \le 2$인 경우 세 점 P, Q, R이 아래의 그림처럼 위치하고, 삼각형 PQR의 넓이는

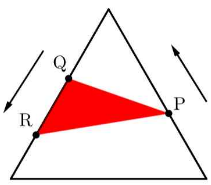
$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(2t-3)(3-\sqrt{2}t)\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(4-2t)(t-1)\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(\sqrt{2}t-2)(2-t)\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{(2+3\sqrt{2})t^2-(14+5\sqrt{2})t+18\right\} \end{aligned}$$

이다. 이차함수 $f(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{(2+3\sqrt{2})t^2-(14+5\sqrt{2})t+18\right\}$는 $t=t_0=\frac{14+5\sqrt{2}}{2(2+3\sqrt{2})}=\frac{1+16\sqrt{2}}{14}$일 때 최솟값을 가진다. $\frac{3}{2}<t_0<2$이므로 $S(t)$는 $\frac{3}{2} \le t \le t_0$에서 감소하고 $t_0 \le t \le 2$에서 증가한다.

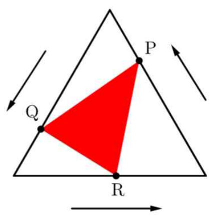
(i)과 (ii)에 의하여 $S(t)$는 $\sqrt{2} \le t \le 2$에서 $t=t_0$일 때 최솟값을 갖고 $t=\sqrt{2}$ 또는 2일 때 최댓값을 갖는다.

$$S(2)-S(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2}-1)-\frac{\sqrt{3}}{2}(3\sqrt{2}-4)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-2\sqrt{2})>0$$

이므로 $S(t)$가 최대가 되는 시각은 2이고 최소가 되는 시각은 $\frac{1+16\sqrt{2}}{14}$이다.



(i) $\sqrt{2} \le t \le \frac{3}{2}$



(ii) $\frac{3}{2} \le t \le 2$

[문제 3] (105점)

다음 그림과 같이 12개의 칸에 번호를 붙인 보관함을 흰 구슬 5개와 검은 구슬 7개로 빈칸 없이 채우려고 한다.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

보관함의 적어도 한 개의 가로줄 또는 세로줄을 같은 색의 구슬로 채우는 경우의 수를 구하여라. (단, 보관함의 한 칸에는 구슬 한 개만 넣을 수 있다.)

[예시답안]

흰 구슬로 채워진 한 개의 가로줄이 있으면 나머지 9개의 칸에 7개의 검은 구슬을 넣어야 하므로 검은 구슬로 채워진 가로줄이 적어도 하나 존재한다. 흰 구슬로 채워진 한 개의 세로줄이 있으면 나머지 8개의 칸에 7개의 검은 구슬을 넣어야 하므로 검은 구슬로 채워진 세로줄이 적어도 하나 존재한다. 따라서 검은 구슬로 가로줄 또는 세로줄을 채우는 경우의 수만 생각해도 된다. 검은 구슬은 7개이므로 가로줄은 최대 2개, 세로줄은 최대 1개 채울 수 있다.

(i) 검은 구슬로 가로줄 중 한 개만 채우는 경우

4개의 가로줄 중 검은 구슬로 채워질 한 개의 가로줄을 선택하는 경우의 수가 ${}_4C_1$이다. 나머지 9개의 칸에 남은 4개의 검은 구슬을 넣는 경우의 수는 ${}_9C_4$이다. 여기서 나머지 9개의 칸에 검은 구슬로 한 개의 가로줄을 채우는 경우를 제외해야 하므로 ${}_3C_1 \times {}_6C_1$을 빼야 한다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times \left({}_9C_4 - {}_3C_1 \times {}_6C_1\right) = 432$이다.

(ii) 검은 구슬로 가로줄 중 두 개를 채우는 경우

4개의 가로줄 중 검은 구슬로 채워질 두 개의 가로줄을 선택하는 경우의 수가 ${}_4C_2$이다. 나머지 6개의 칸에 남은 1개의 검은 구슬을 넣는 방법의 수는 ${}_6C_1$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_6C_1 = 36$이다.

(iii) 검은 구슬로 세로줄 중 한 개를 채우는 경우

3개의 세로줄 중 검은 구슬로 채워질 하나의 세로줄을 선택하는 경우의 수가 ${}_3C_1$이고 나머지 8개의 칸에 남은 3개의 검은 구슬을 채우는 방법의 수는 ${}_8C_3$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_8C_3 = 168$이다.

(iv) 검은 구슬로 한 개의 가로줄과 한 개의 세로줄을 채우는 경우

3개의 세로줄 중 검은 구슬로 채워질 한 개의 세로줄을 선택하는 경우의 수가 ${}_3C_1$이고, 4개의 가로줄 중 검은 구슬로 채워질 한 개의 가로줄을 선택하는 경우의 수가 ${}_4C_1$이다. 나머지 6개의 칸에 남은 1개의 검은 구슬을 넣는 방법의 수는 ${}_6C_1$이므로 구하는 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_4C_1 \times {}_6C_1 = 72$이다.

(iv)는 (i)과 (iii)에 중복으로 포함되므로 구하는 경우의 수는 $432 + 36 + 168 - 72 = 564$이다.

[문제 4] (115점)

모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}\right\} \le \ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

[예시답안]

자연수 k에 대해 닫힌구간 $[k, k+1]$을 생각하자. $y=f(x)$를 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 점 $\left(k+1, \frac{1}{k+1}\right)$에서의 접선이라 하고, $y=g(x)$를 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 두 점 $\left(k, \frac{1}{k}\right)$와 $\left(k+1, \frac{1}{k+1}\right)$을 지나는 직선이라 하자. 그러면

$$f(x)=-\frac{1}{(k+1)^2}\{x-(k+1)\}+\frac{1}{k+1}$$

$$g(x)=-\frac{1}{k(k+1)}(x-k)+\frac{1}{k}$$

이다. 이때 닫힌구간 $[k, k+1]$에서 $\frac{1}{x}-f(x)=\frac{(x-k-1)^2}{x(k+1)^2}\ge 0$이고 $g(x)-\frac{1}{x}=-\frac{(x-k)(x-k-1)}{xk(k+1)}\ge 0$이다.

즉, 닫힌구간 $[k, k+1]$에서 $f(x)\le\frac{1}{x}\le g(x)$이므로

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx \le \int_k^{k+1} g(x)\,dx$$

이다. 이때

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_k^{k+1}\left[-\frac{1}{(k+1)^2}\{x-(k+1)\}+\frac{1}{k+1}\right]dx = \frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}$$

$$\int_k^{k+1} g(x)\,dx = \int_k^{k+1}\left\{-\frac{1}{k(k+1)}(x-k)+\frac{1}{k}\right\}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx = \ln(k+1)-\ln k$$

이므로

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2} \le \ln(k+1)-\ln k \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

이다. 위의 부등식에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}\right\} \le \ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

이 성립한다.