2023학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열 I)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (총 85점)

시립이는 아래와 같은 규칙으로 주사위를 반복해 던져서 나오는 눈의 수만큼 주머니에 공을 넣는 게임을 한다. 게임을 시작할 때 주머니에 있는 공의 개수는 0이다.

(1) 주머니에 있는 공의 개수가 5 이하이면 시립이는 주사위를 새로 던져서 나오는 눈의 수만큼 공을 넣는다.
(2) 주머니에 있는 공의 개수가 6 이상이면 시립이는 주사위를 던지는 것을 멈추고 게임을 끝낸다.

(a) 게임이 끝났을 때 주머니에 있는 공의 개수가 6일 확률 $\frac{q}{p}$를 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (45점)

(b) 시립이가 주사위를 4번 던져서 게임이 끝났을 때 주머니에 있는 공의 개수가 6일 확률 $\frac{s}{r}$를 구하여라. (단, r과 s는 서로소인 자연수이다.) (40점)

[예시답안]

(a) $1 \le k \le 6$에 대하여 주사위를 k번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 6이 되는 경우의 수는 방정식 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 6$에서 $a_1, a_2, \cdots, a_k$가 모두 6 이하의 자연수인 해의 개수와 같다. 이는 방정식 $z_1 + z_2 + \cdots + z_k = 6 - k$에서 $z_1, z_2, \cdots, z_k$가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로 ${}_k\mathrm{H}_{6-k}$이다. 따라서 주사위를 k번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 6일 확률은

$$\frac{{}_k\mathrm{H}_{6-k}}{6^k} = \frac{{}_5\mathrm{C}_{6-k}}{6^k} = \frac{{}_5\mathrm{C}_{k-1}}{6^k}$$

이다. 그러므로 게임이 끝났을 때 주머니에 있는 공의 개수가 6일 확률은

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{{}_5\mathrm{C}_{k-1}}{6^k} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \frac{{}_5\mathrm{C}_k}{6^k} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{6}\right)^5 = \frac{7^5}{6^6}$$

이다.

(b) 게임이 끝났을 때 주머니에 있는 공의 개수가 6인 사건을 A라 하고 주사위를 4번 던져서 게임이 끝나는 사건을 B라 하자. (a)와 마찬가지로 $3 \le n \le 5$에 대하여 주사위를 3번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 n이 되는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$이다. 따라서 주사위를 3번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 n이 될 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{H}_{n-3}}{6^3} = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3}}{6^3} = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2}{6^3}$$

이다. 주사위를 3번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 n $(3 \le n \le 5)$일 때, 다음 주사위를 던져 나오는 눈의 수가 $6-n$ 이상이면 게임이 끝나고 주사위를 던진 횟수가 4가 된다. 따라서 사건 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(B) = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{6^3} \times \frac{4}{6} + \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{6^3} \times \frac{5}{6} + \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{6^3} \times \frac{6}{6} = \frac{55}{6^4}$$

이다. $\mathrm{P}(A \cap B)$는 주사위를 4번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 6일 확률이므로 $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{{}_4\mathrm{H}_2}{6^4} = \frac{10}{6^4}$ 이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{2}{11}$$

이다.

[문제 2] (95점)

함수 $f(x) = -x^3 - x + 3$의 역함수 $g(x)$에 대하여 연속함수 $h(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(1) $h(x) = \begin{cases} 3x & (0 \le x < 1) \\ 4g'(x) + 4 & (1 \le x < 3) \end{cases}$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $h(x+3) = h(x)$이다.

정적분 $\int_0^6 xh(x)\,dx$의 값을 구하여라.

[예시답안]

주어진 정적분을 조건 (2)를 이용해서 정리하면

$$\int_0^6 xh(x)dx = \int_0^3 xh(x)dx + \int_3^6 xh(x)dx = \int_0^3 xh(x)dx + \int_0^3 (x+3)h(x)dx = 2\int_0^3 xh(x)dx + 3\int_0^3 h(x)dx$$

이다.

$f(1) = 1$이므로 $g(1) = 1$이고 $f(0) = 3$이므로 $g(3) = 0$이다. 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 서로 역함수 관계이므로

$$\int_1^3 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - 1 = \frac{5}{4}$$

이고

$$\int_1^3 xg'(x)dx = [xg(x)]_1^3 - \int_1^3 g(x)dx = -\frac{9}{4}$$

이다. 따라서

$$\int_0^3 xh(x)dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^3 x\{4g'(x)+4\}dx = 8$$

이고

$$\int_0^3 h(x)dx = \int_0^1 3x\,dx + \int_1^3 \{4g'(x)+4\}dx = \frac{3}{2} + 4\{g(3) - g(1)\} + 8 = \frac{11}{2}$$

이다. 구하는 정적분의 값은

$$\int_0^6 xh(x)dx = 2 \cdot 8 + 3 \cdot \frac{11}{2} = \frac{65}{2}$$

이다.

[문제 3] (105점)

다음을 만족시키는 서로 다른 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하여라.

$$\log_2(a+4b) + 2\log_2 c - \log_2 3 = 100$$

[예시답안]

조건에서 주어진 식을 정리하면

$$(a+4b)c^2 = 3 \cdot 2^{100} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이다. 따라서 $c = 2^r (r = 0, 1, \cdots, 49)$이다. $r = 0, 1, \cdots, 49$에 대해

$$a = 4 \cdot (3 \cdot 2^{98-2r} - b)$$

이므로 ①을 만족시키는 순서쌍의 개수는 $3 \cdot 2^{98-2r} - 1$이다. 따라서 ①을 만족시키는 자연수의 모든 순서쌍의 개수는

$$\sum_{r=0}^{49}(3 \cdot 2^{98-2r} - 1) = 2^{100} - 51$$

이다.

a, b, c는 서로 다른 세 자연수이므로 아래 (i), (ii), (iii), (iv)를 생각해야 한다.

(i) $a = b$인 경우

$a + 4b = 5a$이므로 ①의 좌변은 5의 배수이지만 우변은 5의 배수가 아니다. 따라서 ①을 만족시키는 자연수의 순서쌍은 없다.

(ii) $a = c$인 경우

$(a+4b)a^2 = 3 \cdot 2^{100}$이므로 $a^3 < 3 \cdot 2^{100}$이고 $a = 2^r (r = 0, 1, \cdots, 33)$이다. 이때

$$b = 3 \cdot 2^{98-2r} - 2^{r-2}$$

이고 b는 자연수이므로 $r = 2, 3, \cdots, 33$이다. 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 32이다.

(iii) $b = c$인 경우

$(a+4b)b^2 = 3 \cdot 2^{100}$이므로 $4b^3 < 3 \cdot 2^{100}$이고 $b = 2^r (r = 0, 1, \cdots, 33)$이다. 이때

$$a = 3 \cdot 2^{100-2r} - 2^{r+2}$$

이고 a는 자연수이므로 $r = 0, 1, 2, \cdots, 33$이다. 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 34이다.

(iv) $a = b = c$인 경우

(i)에 의해서 ①을 만족시키는 자연수의 순서쌍은 없다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$2^{100} - 51 - 32 - 34 = 2^{100} - 117$$

이다.

[문제 4] (총 115점)

좌표평면 위의 두 점 $F(5,\ 0)$, $F'(-5,\ 0)$을 초점으로 하는 타원 C_1과 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 C_2가 있다. 두 곡선 C_1, C_2의 제1사분면 위의 교점 P에 대하여 $\overline{PF}\times\overline{PF'}=20$일 때, 다음에 답하여라.

(a) $\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}$의 값의 범위를 구하여라. (75점)

(b) $\angle FPF'=\dfrac{\pi}{3}$일 때, $\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}$의 값을 구하여라. (40점)

[예시답안](a) 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 C_1의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>5$, $b^2=a^2-25$), 쌍곡선 C_2의 방정식을 $\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{d^2}=1$ (단, $5>c>0$, $d^2=25-c^2$)이라 하자. 타원과 쌍곡선의 정의로부터 $\overline{PF'}+\overline{PF}=2a$이고 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2c$이므로 $\overline{PF}=a-c$이고 $\overline{PF'}=a+c$이다. $\overline{PF}\times\overline{PF'}=20$이므로 $a^2=c^2+20$이다. 또한, 타원 C_1에서 $a>5$이고 쌍곡선 C_2에서 $0<c<5$이므로 $\sqrt{5}<c<5$이다.

$a^2=c^2+20$이므로

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}=\frac{\overline{PF}^2}{\overline{PF}\times\overline{PF'}}=\frac{(a-c)^2}{20}=\frac{(\sqrt{c^2+20}-c)^2}{20}$$

이다. $f(t)=\sqrt{t^2+20}-t$라 하면 $f(t)>0$이고 $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+20}}-1<0$이다. 따라서 $\dfrac{\{f(t)\}^2}{20}$은 감소함수이다.

$\sqrt{5}<c<5$일 때 $\dfrac{\{f(5)\}^2}{20}<\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}<\dfrac{\{f(\sqrt{5})\}^2}{20}$이므로 $\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}$의 범위는

$$\frac{7-3\sqrt{5}}{2}<\frac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

이다.

(b) $\overline{FF'}=10$이므로 코사인법칙에 의하여

$$100=\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2-2\,\overline{PF}\times\overline{PF'}\times\cos\frac{\pi}{3}=\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2-20=(a-c)^2+(a+c)^2-20$$

이다. 위 식을 정리하면 $a^2+c^2=60$이다. $a^2=c^2+20$이므로 $a^2=40$, $c^2=20$이다. 따라서

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}=\frac{a-c}{a+c}=\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{10}+2\sqrt{5}}=3-2\sqrt{2}$$

이다.