2022학년도 수시모집 논술전형

모의 논술고사 해설지 (자연계열)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (총 85점)

$0<t<\frac{\pi}{2}$에 대하여 곡선 $y=-t^2x^2+1$과 직선 $y=(2\tan t)x$ 및 y축의 양의 부분으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $A(t)$라 하고, 곡선 $y=-t^2x^2+1$과 직선 $y=(2\tan t)x$ 및 x축의 양의 부분으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $B(t)$라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) 곡선 $y=-t^2x^2+1$과 직선 $y=(2\tan t)x$의 교점 중 제1사분면에 있는 점의 x좌표를 $p(t)$라 할 때, 극한값 $\lim_{t\to 0+} t\,p(t)$를 구하여라. (35점)

(b) 극한값 $\lim_{t\to 0+}\frac{A(t)}{B(t)}$를 구하여라. (50점)

[예시답안]

(a) $p(t)>0$이고 $-t^2(p(t))^2+1=(2\tan t)p(t)$이므로 $p(t)=\frac{-\tan t+\sqrt{\tan^2 t+t^2}}{t^2}$ 이다. 따라서

$$\lim_{t\to 0+} t\,p(t)=\lim_{t\to 0+}\frac{-\tan t+\sqrt{\tan^2 t+t^2}}{t}=\lim_{t\to 0+}\left(-\frac{\tan t}{t}+\sqrt{\frac{\tan^2 t}{t^2}+1}\right)=\sqrt{2}-1$$

이다.

(b) $A(t)+B(t)=\int_0^{\frac{1}{t}}(-t^2x^2+1)dx=\frac{2}{3t}$이므로

$$A(t)=\frac{2}{3t}-B(t)$$

이고,

$$B(t)=\int_0^{p(t)}(2\tan t)x\,dx+\int_{p(t)}^{\frac{1}{t}}(-t^2x^2+1)dx=(p(t))^2\tan t+\frac{t^2(p(t))^3}{3}-p(t)+\frac{2}{3t}$$

이다. 따라서 $t>0$일 때,

$$\frac{A(t)}{B(t)}=\frac{\frac{2}{3t}}{(p(t))^2\tan t+\frac{t^2(p(t))^3}{3}-p(t)+\frac{2}{3t}}-1=\frac{2}{3(tp(t))^2\frac{\tan t}{t}+(tp(t))^3-3tp(t)+2}-1$$

이고 $\lim_{t\to 0+} t\,p(t)=\sqrt{2}-1$, $\lim_{t\to 0+}\frac{\tan t}{t}=1$이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{A(t)}{B(t)}=\frac{2}{3(\sqrt{2}-1)^2\cdot 1+(\sqrt{2}-1)^3-3(\sqrt{2}-1)+2}-1=\frac{8\sqrt{2}-3}{17}$$

이다.

[문제 2] (95점)

자연수 n에 대해여

$$f(x) = 4(\log_2 n)\cos x + 4(\log_4 n)^2 - 12, \qquad g(x) = \begin{cases} 4\sin^2 x & (|x| \le 2n\pi) \\ -17 & (|x| > 2n\pi) \end{cases}$$

라 하자. 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프의 교점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{2022} a_k$의 값을 구하여라.

[예시답안]

자연수 n에 대해서 $\log_2 n \ge 0$이므로

$$f(x) \ge 4(\log_2 n)(-1) + (\log_2 n)^2 - 12 = (\log_2 n - 2)^2 - 16 > -17$$

이다. 따라서 $|x| > 2n\pi$에서 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프는 만나지 않고, $|x| \le 2n\pi$에서 방정식 $f(x) = g(x)$를 정리하면

$$\left(\cos x + 2 + \frac{\log_2 n}{2}\right)\left(\cos x - 2 + \frac{\log_2 n}{2}\right) = 0$$

이다. 자연수 n에 대하여 $-2 - \frac{1}{2}\log_2 n \le -2$이고 $-1 \le \cos x \le 1$이므로,

$$\cos x = 2 - \frac{1}{2}\log_2 n$$

이다. 위 방정식은 $4 \le n \le 64$일 때에만 해를 가지므로, $1 \le n \le 3$ 또는 $n \ge 65$이면 $a_n = 0$이고 $4 \le n \le 64$이면 a_n은 다음과 같다.

(i) $n = 4$일 때, $|x| \le 8\pi$에서 방정식 $\cos x = 1$의 해의 개수는 9이므로, $a_4 = 9$이다.

(ii) $5 \le n \le 63$일 때, $|x| \le 2n\pi$에서 방정식 $\cos x = 2 - \frac{1}{2}\log_2 n$의 해의 개수는 $4n$이므로, $a_n = 4n$이다.

(iii) $n = 64$일 때, $|x| \le 128\pi$에서 방정식 $\cos x = -1$의 해의 개수는 128이므로, $a_{64} = 128$이다.

그러므로

$$\sum_{k=1}^{2022} a_k = 9 + \sum_{k=5}^{63} 4k + 128 = 8161$$

이다.

[문제 3] (총 105점)

아래와 같이 화살표 8개가 처음 4개는 위(↑)로 향하고, 나머지 4개는 아래(↓)로 향하도록 놓여있다.

↑↑↑↑↓↓↓↓

위와 같이 놓여있는 8개의 화살표 중 2개를 임의로 선택하여 화살표의 방향을 반대로 바꾼 후, 이 8개의 화살표 중 다시 2개를 임의로 선택하여 방향을 반대로 바꾸는 시행을 하였다. 이 시행을 마쳤을 때, 위로 향하는 화살표가 4개인 사건을 A, 마지막 2개의 화살표가 위로 향하는 사건을 B라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(a) 확률 $\mathrm{P}(A)$를 구하여라. (50점)
(b) 조건부 확률 $\mathrm{P}(B|A)$를 구하여라. (55점)

[예시답안]

(a) 첫 번째로 2개의 화살표를 선택하여 방향을 바꾼 후에 8개의 화살표 중 위로 향하는 화살표의 개수를 X_1이라 하고, 시행을 마친 후에 8개의 화살표 중 위로 향하는 화살표의 개수를 X_2라 하자. 그러면 A는 $X_2=4$인 사건이다. 사건 A가 일어났을 때, X_1이 가질 수 있는 값은 2, 4, 6이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X_2=4)=\sum_{k=1}^{3}\mathrm{P}(X_1=2k)\mathrm{P}(X_2=4\,|\,X_1=2k)$$

이다. 또한

$$\mathrm{P}(X_1=2)=\mathrm{P}(X_1=6)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{14}$$
$$\mathrm{P}(X_1=4)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{8}{14}$$

이며

$$\mathrm{P}(X_2=4|X_1=2)=\mathrm{P}(X_2=4|X_1=6)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{15}{28}$$
$$\mathrm{P}(X_2=4|X_1=4)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{16}{28}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{14}\frac{15}{28}+\frac{8}{14}\frac{16}{28}+\frac{3}{14}\frac{15}{28}=\frac{109}{196}$$

이다.

(b) 사건 $A\cap B$가 일어나기 위해서는 7, 8번째 화살표가 각각 단 한 번씩 선택되어야 하며 1~4번째 화살표 중 두 개가 선택되어야 한다. 첫 번째 선택에서 7, 8번째 화살표가 선택되어 사건 $A\cap B$가 일어나는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$이다. 마찬가지로 두 번째 선택에서 7, 8번째 화살표가 선택되어 사건 $A\cap B$가 일어나는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$이다. 그리고 첫 번째 선택에서 7번째 화살표가 선택되고, 두 번째 선택에서 8번째 화살표가 선택되어 사건 $A\cap B$가 일어나는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1$이고 그 반대의 경우의 수도 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2\times{}_4\mathrm{C}_2+2\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{9}{196}$$

이고 (a)에서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{109}{196}$이므로 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{9}{109}$이다.

[문제 4] (115점)
자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$e^2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$$

[예시답안]

로그함수가 구간 $(0,\infty)$에서 증가함수이므로 자연수 n에 대하여 $2 \le (2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$가 성립함을 보이면 충분하다. 구간 $(0,\infty)$에서 함수

$$f(x) = (2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

라 하자. 그러면

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 2$$

이다. 구간 $(0,\infty)$에서 함수 $f(x)$는 미분가능하고

$$f'(x) = 2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2x+1}{x^2+x}$$

이므로 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$이다.

구간 $(0,\infty)$에서 $f''(x) = \frac{1}{(x^2+x)^2} > 0$이므로 $f'(x)$는 증가함수이다. 따라서 구간 $(0,\infty)$에서 $f'(x) \le \lim_{t\to\infty} f'(t) = 0$이므로 $f(x)$는 감소함수이다. 그러므로 자연수 n에 대하여

$$f(n) \ge \lim_{x\to\infty} f(x) = 2$$

이다.