2022학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열 II)

출제위원장	(인)	출제위원	(인)
출제위원	(인)	출제위원	(인)
출제위원	(인)	출제위원	(인)
검토위원	(인)	검토위원	(인)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (85점)

어느 김밥집에서 파는 김밥의 종류는 4가지다. 이 김밥집에서 서울이와 시립이가 다음을 모두 만족시키도록 김밥을 사는 경우의 수를 구하여라. (단, 모든 종류의 김밥은 충분하다.)

(1) 서울이와 시립이는 각각 김밥 5줄을 산다. (2) 서울이가 산 김밥의 종류와 시립이가 산 김밥의 종류는 겹치지 않는다.

[예시답안]

서울이가 산 김밥의 종류의 가짓수에 따라 다음과 같이 경우를 나누자.

(i) 서울이가 1종류의 김밥을 샀을 때, 김밥의 종류를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1$이고, 선택한 1종류의 김밥에서 5줄을 사는 경우의 수는 1이다. 시립이가 나머지 3종류의 김밥에서 5줄을 사는 경우의 수는 ${}_3H_5$이다. 이러한 경우의 수는 ${}_4C_1 \times 1 \times {}_3H_5 = {}_4C_1 \times 1 \times {}_7C_5 = 84$이다.

(ii) 서울이가 2종류의 김밥을 샀을 때, 김밥의 종류를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$이고, 선택한 2종류의 김밥에서 5줄의 김밥을 사는 경우의 수는 ${}_2H_3$이다. 시립이가 나머지 2종류의 김밥에서 5줄을 사는 경우의 수는 ${}_2H_5$이다. 이러한 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_2H_3 \times {}_2H_5 = {}_4C_2 \times {}_4C_3 \times {}_6C_5 = 144$이다.

(iii) 서울이가 3종류의 김밥을 샀을 때, 김밥의 종류를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3$이고, 선택한 3종류의 김밥에서 5줄의 김밥을 사는 경우의 수는 ${}_3H_2$이다. 시립이가 나머지 1종류의 김밥에서 5줄을 사는 경우의 수는 1이다. 이러한 경우의 수는 ${}_4C_3 \times {}_3H_2 \times 1 = {}_4C_3 \times {}_4C_2 \times 1 = 24$이다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 경우의 수는 $84 + 144 + 24 = 252$이다.

[문제 2] (95점)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-2x+11 & (x\le -2) \\ \dfrac{5}{2}x-2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)+11 & (x>-2) \end{cases}$$

의 역함수의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{5}x-1$의 모든 교점의 y좌표의 합을 a라 할 때, a의 정수 부분을 구하여라.

[예시답안]

함수 $y=\frac{1}{5}x-1$의 역함수는 $y=5x+5$이다. 그러므로 구하는 교점의 y좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=5x+5$의 교점의 x좌표와 같다.

(i) $x\le -2$일 때

$x^3-2x+11=5x+5$를 정리하면 $(x-1)(x-2)(x+3)=0$이다. 그러므로 $x\le -2$일 때의 근은 -3뿐이다.

(ii) $x>-2$일 때

$\frac{5}{2}x-2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)+11=5x+5$를 정리하면 $\frac{5}{2}x+2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)-6=0$이다.

$h(x)=\frac{5}{2}x+2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)-6$이라 하자. $h'(x)=\frac{5}{2}-\frac{2\pi}{3}sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\ge\frac{5}{2}-\frac{2\pi}{3}=\frac{15-4\pi}{6}>0$이므로 $h(x)$는 증가함수이다. 따라서 방정식 $h(x)=0$의 근의 개수는 0 또는 1이다. $h(x)$는 연속함수이고, $h(3)=-\frac{1}{2}<0$이고 $h(4)=3>0$이므로, 사잇값 정리에 의해 주어진 방정식은 열린구간 $(3,4)$에서 오직 1개의 근을 갖는다.

(i), (ii)에 의해 a의 정수 부분은 0이다.

[문제 3] (105점)

자연수 n에 대하여 다음을 모두 만족시키는 두 자연수 k, m의 순서쌍 (k, m)의 개수를 a_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{p} a_n \le 2022$를 만족시키는 자연수 p의 최댓값을 구하여라.

(1) $k^2 m^3 = 2^{9n}$
(2) $m \le 8^n \le m^2$

[예시답안]

조건 (1)에 의해서 자연수 k, m은 적당한 음이 아닌 두 정수 s, t에 대하여 $k=2^s$, $m=2^t$이다. 조건 (1)로부터 $2s = 9n - 3t$이므로, $0 \le s \le \frac{9n}{2}$이고

$$\frac{s}{3}\text{는 음이 아닌 정수이다. }\cdots\cdots \text{ ①}$$

조건 (2)에서 $m^3 \le 2^{9n} \le m^6$이고, 이 부등식에 $m^3 = \frac{2^{9n}}{k^2}$와 $k = 2^s$를 대입하여 정리하면

$$0 \le s \le \frac{9n}{4} \quad \cdots\cdots \text{ ②}$$

이다. ①과 ②로부터 a_n은 닫힌구간 $\left[0, \frac{3n}{4}\right]$에 속하는 정수의 개수이다. 자연수 q에 대해서

(i) $n = 4q-3$일 때, $a_n = 3q-2$,
(ii) $n = 4q-2$일 때, $a_n = 3q-1$,
(iii) $n = 4q-1$일 때, $a_n = 3q$,
(iv) $n = 4q$일 때, $a_n = 3q+1$이다.

따라서 자연수 N에 대하여

$$\sum_{n=1}^{4N} a_n = \sum_{q=1}^{N}(a_{4q-3} + a_{4q-2} + a_{4q-1} + a_{4q}) = \sum_{q=1}^{N}(12q-2) = 6N^2 + 4N$$

이다. $N=18$일 때 $\sum_{n=1}^{72} a_n = 6 \times 18^2 + 4 \times 18 = 2016$이고, $\sum_{n=1}^{73} a_n = \sum_{n=1}^{72} a_n + a_{73} = 2071$이므로 $p = 72$이다.

[문제 4] (총 115점)

다음 물음에 답하여라.

(a) 상수 a에 대하여 방정식 $x^3-6x^2+a=0$의 한 근이 t일 때, 나머지 두 근을 t에 대한 식으로 나타내어라. (25점)

(b) 좌표평면에서 직사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, D는 곡선 $y=-x^3+6x^2$에 있는 제1사분면의 점이고, 두 꼭짓점 B, C는 x축에 있다. 직사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때, 변 AB의 길이를 구하여라. (90점)

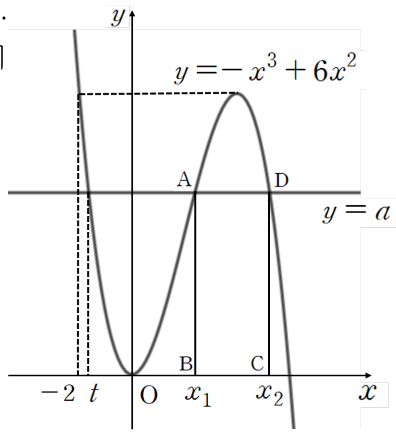
[예시답안]

(a) t가 방정식 $x^3-6x^2+a=0$의 근이므로 $t^3-6t^2+a=0$, $a=6t^2-t^3$이다. 따라서

$$x^3-6x^2+a=x^3-6x^2+6t^2-t^3=(x-t)\{x^2-(6-t)x+t^2-6t\}=0$$

이므로 나머지 두 근은 $\dfrac{6-t\pm\sqrt{(6-t)^2-4(t^2-6t)}}{2}=\dfrac{6-t\pm\sqrt{-3t^2+12t+36}}{2}$이다.

(b) $\mathrm{B}(x_1, 0)$, $\mathrm{C}(x_2, 0)$, $\overline{\mathrm{AB}}=a$라 하자. x_1, x_2는 방정식 $-x^3+6x^2=a$의 해이다. 방정식 $-x^3+6x^2=a$의 x_1, x_2가 아닌 다른 해를 t라 하자. $-2<t<0$이고 (a)에 의해



$$x_1=\frac{6-t-\sqrt{-3t^2+12t+36}}{2},\qquad x_2=\frac{6-t+\sqrt{-3t^2+12t+36}}{2}$$

이므로 직사각형 ABCD의 넓이는 $a(x_2-x_1)=(-t^3+6t^2)\sqrt{-3t^2+12t+36}$이다.

$f(x)=(-x^3+6x^2)\sqrt{-3x^2+12x+36}$,

$g(x)=\ln|f(x)|=2\ln|x|+\ln|x-6|+\dfrac{1}{2}ln|3x^2-12x-36|$라 하자.

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-6}+\frac{6x-12}{2(3x^2-12x-36)}=\frac{4(x^2-2x-6)}{x(x-6)(x+2)}$$

이고 방정식 $x^2-2x-6=0$의 근 중에서 $-2<x<0$인 것은 $x=1-\sqrt{7}$이다.

x	(-2)	$\cdots$	$1-\sqrt{7}$	$\cdots$	(0)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $t=1-\sqrt{7}$에서 직사각형 ABCD는 최대 넓이를 갖고, 이때 변 AB의 길이는 $-(1-\sqrt{7})^3+6(1-\sqrt{7})^2=26-2\sqrt{7}$이다.