2022학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열 I)

출제위원장	(인)	출제위원	(인)
출제위원	(인)	출제위원	(인)
출제위원	(인)	출제위원	(인)
검토위원	(인)	검토위원	(인)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (총 85점)

좌표평면에서 곡선 $y=x-x^2$의 네 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(a, a-a^2)$, $\mathrm{B}(b, b-b^2)$, $\mathrm{C}(1,0)$에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, $0<b<a<1$이다.)

(a) 점 B가 곡선에서 두 점 O와 A 사이를 움직일 때, 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값을 a에 대한 식으로 나타내어라. (25점)

(b) 두 점 A, B가 곡선에서 두 점 O와 C 사이를 움직일 때, 사각형 ABOC의 넓이의 최댓값을 구하여라. (60점)

[예시답안]

삼각형 OAB, 삼각형 AOC, 사각형 ABOC의 넓이를 차례로 S_1, S_2, S_3이라 하자.

이때 $S_1=\dfrac{ab(a-b)}{2}$, $S_2=\dfrac{a-a^2}{2}$, $S_3=S_1+S_2$이다.

(a) $S_1=\dfrac{ab(a-b)}{2}=-\dfrac{a}{2}\left(b-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^3}{8}$이므로 S_1의 최댓값은 $\dfrac{a^3}{8}$이다.

(b) $S_3=S_1+S_2$, $S_1\le\dfrac{a^3}{8}$, $S_2=\dfrac{a-a^2}{2}$이므로 $S_3\le\dfrac{a^3}{8}+\dfrac{a-a^2}{2}=\dfrac{a^3-4a^2+4a}{8}$이다.

$f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+4x}{8}$라 하면 $f'(x)=\dfrac{3x^2-8x+4}{8}=\dfrac{(3x-2)(x-2)}{8}$이다.

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{4}{27}$	$\searrow$	

그러므로 열린구간 $(0,1)$에서 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{4}{27}$이다. $S_3\le\dfrac{4}{27}$이고, $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$일 때 $S_3=\dfrac{4}{27}$이므로, S_3의 최댓값은 $\dfrac{4}{27}$이다.

[문제 2] (총 95점)

한 개의 주사위를 6번 던질 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) 3의 배수의 눈이 연속해서 나오지 않을 확률을 기약분수로 나타내어라. (45점)

(b) 적어도 한 번은 2 이하의 눈이 나왔을 때, 3의 배수의 눈이 연속해서 나오지 않을 확률을 기약분수로 나타내어라. (50점)

[예시답안]

(a) 주사위를 한 번 던졌을 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이며, 주사위를 여러 번 던졌을 때, 매번 3의 배수의 눈이 나오는 사건은 서로 독립이다. 3의 배수가 연속해서 나오지 않는 확률은 다음과 같다.

(i) 3의 배수가 한 번도 나오지 않을 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$이다.

(ii) 3의 배수가 한 번 나올 확률은 ${}_6\mathrm{C}_1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{192}{729}$이다.

(iii) 3의 배수가 두 번 나오고, 3의 배수가 연속해서 나오지 않을 확률은 ${}_5\mathrm{C}_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{160}{729}$이다.

(iv) 3의 배수가 세 번 나오고, 3의 배수가 연속해서 나오지 않을 확률은 ${}_4\mathrm{C}_3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{729}$이다.

(i)~(iv)에 의해서 구하는 확률은

$$\frac{64+192+160+32}{729} = \frac{448}{729}$$

이다.

(b) 주사위를 6번 던졌을 때, 3의 배수의 눈이 연속해서 나오지 않는 사건을 A, 적어도 한 번은 2 이하의 눈이 나오는 사건을 B라고 하자. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B^C)$이므로,

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B^C)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)}{\mathrm{P}(B)}$$

이다. 또한,

$$\mathrm{P}(B^C) = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}, \quad \mathrm{P}(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{665}{729}$$

이다. $\mathrm{P}(A|B^C)$는 나온 눈의 개수가 모두 3 이상일 때, 3의 배수의 눈이 연속해서 나오지 않을 확률과 같다. 나온 눈의 개수가 모두 3 이상일 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로, (a)와 같은 방법으로

$$\mathrm{P}(A|B^C) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6\mathrm{C}_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_5\mathrm{C}_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_4\mathrm{C}_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{21}{64}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\frac{448}{729} - \frac{64}{729} \times \frac{21}{64}}{\frac{665}{729}} = \frac{427}{665} = \frac{61}{95}$$

이다.

[문제 3] (105점)

다음 정적분의 값을 구하여라.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x\right| dx$$

[예시답안]

$f(x)=3\sqrt{2}\sin^3 x-\cos x$라 하자. $-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$일 때, $\sin x\le 0$, $\cos x\ge 0$이므로 $f(x)\le 0$이다. 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $g(x)=3\sqrt{2}\sin^3 x$는 증가함수이고, 함수 $h(x)=\cos x$는 감소함수이다. $f(x)=g(x)-h(x)$는 연속인 증가함수이고, $f(0)=-1<0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sqrt{2}>0$이므로 사잇값 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 유일한 해를 갖는다. 이 해를 a라 하자. $-\frac{\pi}{2}\le x\le a$이면 $f(x)\le 0$이고 $a\le x\le\frac{\pi}{2}$이면 $f(x)\ge 0$이다. 또한

$$3\sqrt{2}\sin^3 a=\cos a,\quad 18\sin^6 a=\cos^2 a=1-\sin^2 a,\quad 18\sin^6 a+\sin^2 a-1=(3\sin^2 a-1)(6\sin^4 a+2\sin^2 a+1)=0$$

이므로 $3\sin^2 a=1$, $\sin a=\frac{1}{\sqrt{3}}$이고 $\cos a=\sqrt{1-\sin^2 a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이다.

$$\sin^3 x=\sin^2 x\sin x=(1-\cos^2 x)\sin x=\sin x-\cos^2 x\sin x$$

이므로

$$\int(3\sqrt{2}sin^3 x-\cos x)\,dx=\int 3\sqrt{2}\,sin\,x\,dx-\int 3\sqrt{2}\,cos^2 x\sin x\,dx-\int\cos x\,dx=-3\sqrt{2}\,cos\,x+\sqrt{2}\,cos^3 x-\sin x+C$$

이다. $F(x)=\sqrt{2}\,cos^3 x-3\sqrt{2}\,cos\,x-\sin x$라 하자. 이때 $F'(x)=f(x)$이고 $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$이며,

$$F(a)=\sqrt{2}\,cos^3 a-3\sqrt{2}\,cos\,a-\sin a=\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}-3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{17\sqrt{3}}{9}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|3\sqrt{2}\sin^3 x-\cos x\right|dx &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a}f(x)\,dx+\int_{a}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx\\ &=-F(a)+F\left(-\frac{\pi}{2}\right)+F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(a)\\ &=\frac{34\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

이다.

[문제 4] (115점)

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의가

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{2}{\sqrt{a_n}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$4 < a_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 4 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

[예시답안]

$a_{n+1} - 4 = \frac{3}{4}(a_n - 4) + \frac{2}{\sqrt{a_n}} - 1$이다. 양수 a에 대하여

$$1 - \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)} = \frac{a-4}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)}$$

이므로, $a > 4$일 때

$$0 < 1 - \frac{2}{\sqrt{a}} < \frac{a-4}{8}$$

이다. 따라서 $a > 4$일 때

$$(a-4)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}(a-4) - \frac{1}{8}(a-4) < \frac{3}{4}(a-4) - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{a}}\right) < \frac{3}{4}(a-4)$$

이므로

$$0 < \frac{3}{4}(a-4) + \frac{2}{\sqrt{a}} - 1 < \frac{3}{4}(a-4) \ \cdots\cdots \ ①$$

이다.

모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n - 4 \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$이 성립함을 보이면 된다. 이를 수학적 귀납법을 이용해서 보이자.

$n = 1$일 때, $0 < 5 - 4 \le \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$이므로 성립한다.

$n = k$일 때, 성립한다고 가정하면

$$0 < a_k - 4 \le \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \ \cdots\cdots \ ②$$

이므로 $a_k > 4$이다.

①, ②에 의해

$$0 < a_{k+1} - 4 = \frac{3}{4}(a_k - 4) + \frac{2}{\sqrt{a_k}} - 1 < \frac{3}{4}(a_k - 4) \le \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

이다. 따라서 $n = k+1$일 때도 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n - 4 \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$이 성립한다.