[문제 1] (100점)

$1 \le k \le n$인 두 자연수 k, n과 양수 a에 대하여 $a_k = \sum_{l=1}^{2n} |k-l|^a$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{a+2}}$의 값을 구하여라.

[예시답안]

$$a_1 = 0+1+2^a+3^a+ \cdots +(2n-1)^a$$

$$a_2 = 1+0+1+2^a+ \cdots +(2n-2)^a$$

$$\vdots$$

$$a_n = (n-1)^a+(n-2)^a+ \cdots +1+0+1+2^a+ \cdots +n^a$$

이다. 따라서 $1 \le k \le n$, $1 \le l \le 2n$, $0 \le m \le 2n-1$에 대해 $|k-l| = m$인 두 자연수의 순서쌍 (k, l)의 개수는 다음과 같다.

[1] $m=0$인 것은 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $\cdots$, (n, n)로 모두 n개이다.

[2] $1 \le m \le n-1$인 것은

$(m+1, 1)$, $(m+2, 2)$, $\cdots$, $(n, n-m)$, $(1, m+1)$, $\cdots$, $(n, n+m)$

의 $2n-m$개이다.

[3] $n \le m \le 2n-1$인 것은 $(1, m+1)$, $(2, m+2)$, $\cdots$, $(2n-m, 2n)$의 $2n-m$개이다.

따라서 $S_n = \sum_{m=1}^{2n-1} (2n-m)m^a = \sum_{m=1}^{2n} (2n-m)m^a$이므로

$$\frac{S_n}{n^{a+2}} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(2n-m)m^a}{n^{a+2}} = 2\sum_{m=1}^{2n} \left(\frac{m}{n}\right)^a \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^{2n} \left(\frac{m}{n}\right)^{a+1} \frac{1}{n}$$

이다. 또 정적분과 무한급수의 관계에 의해 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

이므로 치환적분에 의해

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=n+1}^{2n} f\left(\frac{m}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f\left(1+\frac{m}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 f(1+x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{2n} f\left(\frac{m}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right)\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n+1}^{2n} f\left(\frac{m}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{a+2}} = 2\int_0^2 x^a\,dx - \int_0^2 x^{a+1}\,dx = \frac{2^{a+2}}{(a+1)(a+2)}$$

이다.

[문제 2] (100점)

좌표평면에서 반지름의 길이가 1이고 중심이 원점 O인 원에서 두 점 P, Q가 움직인다. 시각 t일 때 P, Q가 x축의 양의 방향과 이루는 각은 각각 $4\cos 4t$, $8\cos 2t$이다. 삼각형 OPQ의 넓이가 최대가 되는 t의 개수를 구하여라. (단, $0 \le t \le 2\pi$)

[예시답안 1]

시각 t일 때 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\left|\sin(4\cos 4t - 8\cos 2t)\right|$이다.

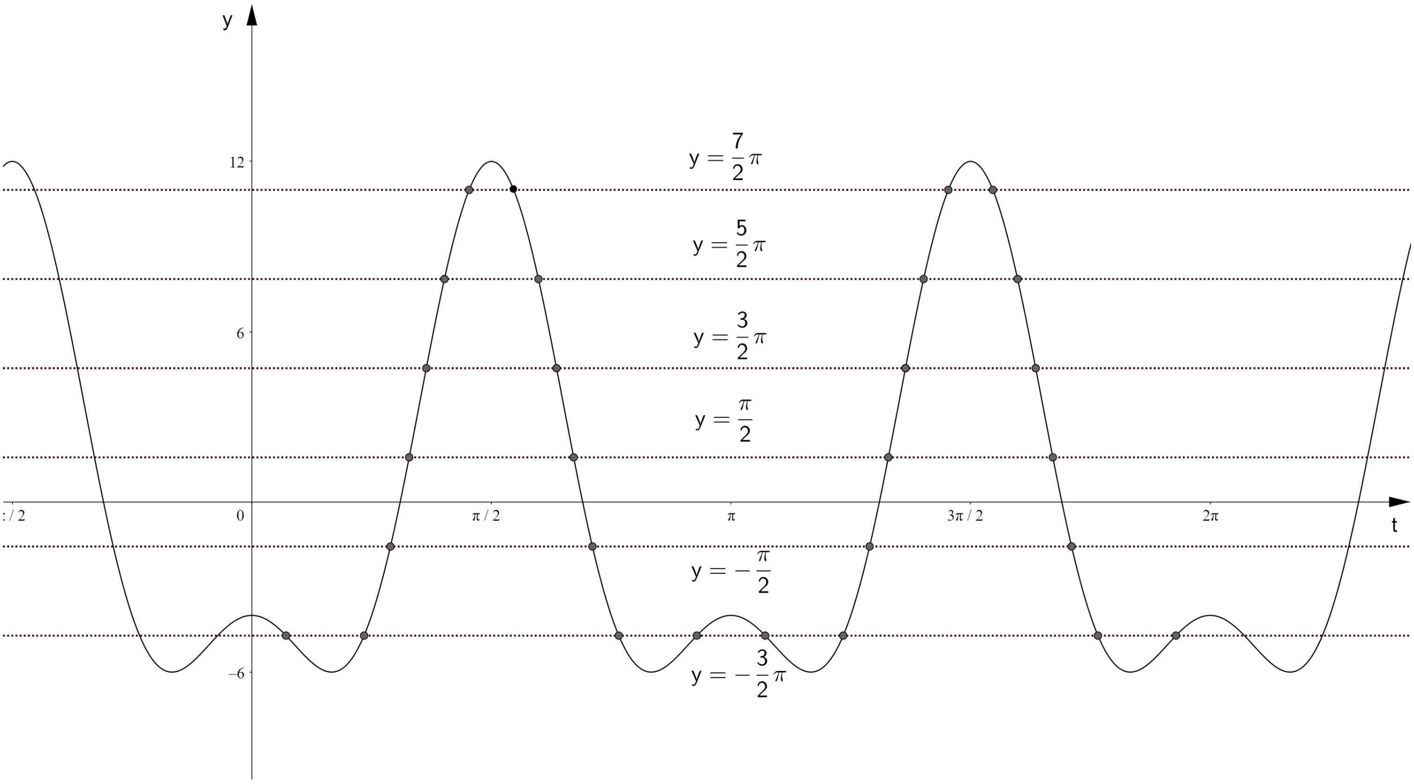
$f(t) = 4\cos 4t - 8\cos 2t$라 하면 $f'(t) = -16\sin 4t + 16\sin 2t = -32\sin 2t\cos 2t + 16\sin 2t = -16\sin 2t(2\cos 2t - 1)$이므로

$f'(t) = 0$이면 $\sin 2t = 0$ 이거나 $\cos 2t = \frac{1}{2}$이다.

$\sin 2t = 0$에서 $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$이고 $\cos 2t = \frac{1}{2}$에서 $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$이다.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5}{6}\pi$		π		$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{11}{6}\pi$		2π
$f'(t)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$f(t)$	-4	↘	-6	↗	12	↘	-6	↗	-4	↘	-6	↗	12	↘	-6	↗	-4

$y = f(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



삼각형의 OPQ의 넓이는 $f(t) = \frac{(2n+1)}{2}\pi$ $(n = -2, -1, 0, 1, 2, 3)$을 만족하는 t에서 최댓값을 갖는다. 그래프 개형에서 교점의 개수를 세면 총 28개이다.

[예시답안 2]

시각 t일 때 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\left|\sin(4\cos 4t - 8\cos 2t)\right|$이다.

$x = \cos 2t$라 하면 $\cos 4t = 2x^2 - 1$이므로 $4\cos 4t - 8\cos 2t = 8x^2 - 8x - 4$이다.

$f(x) = 8x^2 - 8x - 4 = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6$라 하면 $f(-1) = 12$, $f(1) = -4$이고 $\frac{7\pi}{2} < 12 < \frac{9\pi}{2}$, $4 < \frac{3\pi}{2} < 5$, $7 < \frac{5\pi}{2} < 8$ 이므로 $[-1, 1]$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = \frac{(2n+1)\pi}{2}$가 만나도록 하는 정수 n의 값과 교점의 개수는 $n = -2$일 때 2이고, $n = -1, 0, 1, 2, 3$일 때 각각 1로, 교점은 모두 7개이고 교점의 x좌표의 절댓값은 1보다 작다.
또 $0 \le t \le 2\pi$에서 $|a| < 1$에 대해 $\cos 2t = a$인 t는 모두 4개다.
따라서 구하는 값은 $7 \times 4 = 28$이다.

[문제 3] (100점)

함수 $f(x)=x^3-a^2x$의 그래프의 점 $\mathrm{P}(x, f(x))$에 대하여, P에서 x축까지의 거리와 P에서 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 함숫값으로 하는 함수를 $g(x)$라고 하자. 다음 물음에 답하여라. (단, $a \geq 0$이다.)

a) a의 범위에 따라 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x를 모두 구하여라. [60점]

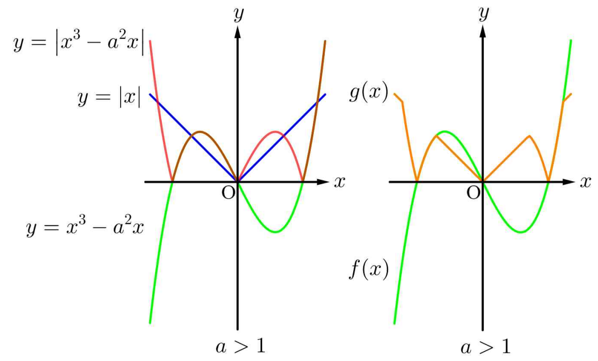
b) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라. [40점]

[예시답안]

점 $\mathrm{P}(x, x^3-a^2x)$에서 x축까지의 거리는 $|x^3-a^2x|$이고 P에서 y축까지의 거리는 $|x|$이다. 또

$$|x^3-a^2x|<|x| \Leftrightarrow |x^2-a^2|<1 \Leftrightarrow a^2-1<x^2<a^2+1$$

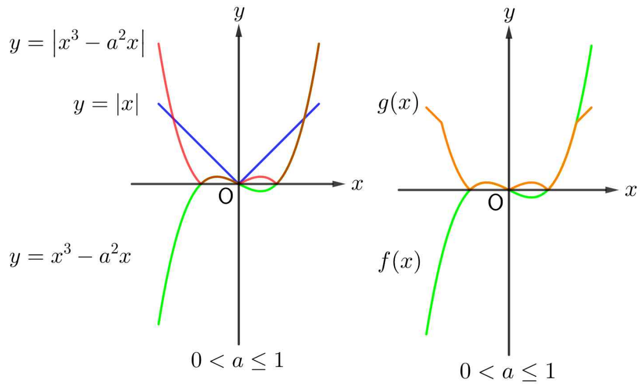
이므로 다음이 성립한다.



[1] $a>1$일 때 $|x^3-a^2x|<|x| \Leftrightarrow \sqrt{a^2-1}<|x|<\sqrt{a^2+1}$ 이므로

$$g(x)=\begin{cases} |x|, & |x| \geq \sqrt{a^2+1} \\ |x^3-a^2x|, & \sqrt{a^2-1}<|x|<\sqrt{a^2+1} \\ |x|, & |x| \leq \sqrt{a^2-1} \end{cases}$$

이다.



[2] $0<a\leq 1$일 때 $|x^3-a^2x|<|x| \Leftrightarrow |x|<\sqrt{a^2+1}$ 이므로

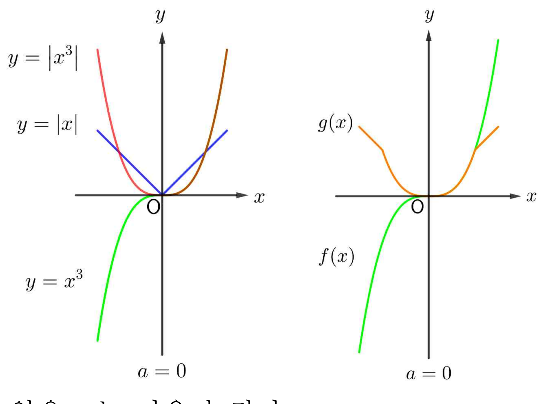
$$g(x)=\begin{cases} |x|, & |x| \geq \sqrt{a^2+1} \\ |x^3-a^2x|, & |x|<\sqrt{a^2+1} \end{cases}$$

이다.

[3] $a=0$일 때

$$g(x)=\begin{cases} |x|, & |x| \geq 1 \\ |x^3|, & |x|<1 \end{cases}$$

이다.



또 방정식 $x^3-a^2x=0$의 근은 $0, \pm a$이다.

a) 위에서 보인 바에 의해 a의 값의 범위에 따라 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x는 다음과 같다.

a	$a>1$	$0<a\leq 1$	$a=0$
x	$0, \pm\sqrt{a^2-1}, \pm a, \pm\sqrt{a^2+1}$	$0, \pm a, \pm\sqrt{a^2+1}$	± 1

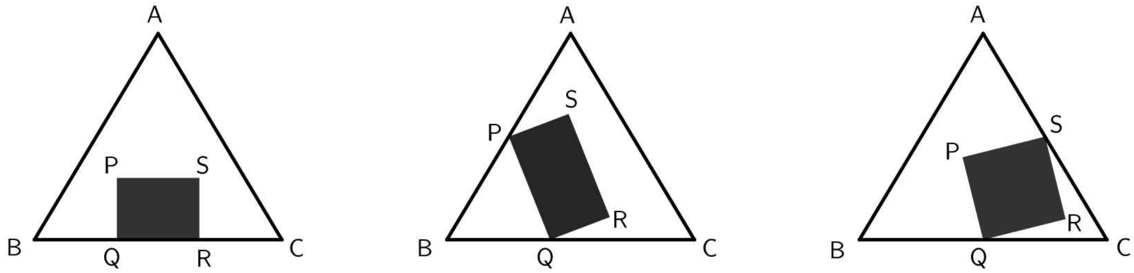
b) 위에서 그린 그래프를 보면 둘러싸인 영역의 넓이는 모든 경우에 대해 $2\int_0^a (a^2x-x^3)\,dx=\dfrac{a^4}{2}$이다.

[문제 4] (100점)

한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC의 세 변 및 내부에 포함되는 직사각형 PQRS의 넓이의 최댓값을 구하여라.

[예시답안]

직사각형의 네 꼭짓점 중 많아야 한 개가 정삼각형의 변에 있으면 직사각형이 정삼각형 내부에 포함되도록 직사각형의 가로와 세로의 길이를 키울 수 있다. 또 직사각형의 네 꼭짓점 중 2개만이 정삼각형의 변에 있으면, 직사각형의 네 꼭짓점 중 많아야 한 개가 정삼각형의 변에 있도록 평행이동 할 수 있다.



따라서 직사각형의 네 꼭짓점 중 적어도 3개가 정삼각형의 변에 있을 때, 직사각형 넓이의 최댓값을 구하면 된다. 두 꼭짓점이 한 변에 있는 경우 다른 두 꼭짓점은 이미 삼각형의 다른 두 변에 있거나 다른 두 변에 있도록 키울 수 있다. 따라서 P는 선분 AB, Q는 선분 BC, R은 선분 CA에 있다고 하여도 무방하다. P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 점 H, $a=\overline{\mathrm{BQ}}$, $\theta=\angle\mathrm{PQB}$라 하자. 이때 다음이 성립한다.

[1] 꼭짓점 S는 삼각형 ABC의 변 또는 내부에 있으므로

$$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{PBQ}+\angle\mathrm{PQB}=\frac{\pi}{3}+\theta\geq\frac{\pi}{2},\ \angle\mathrm{ARQ}=\angle\mathrm{RCQ}+\angle\mathrm{RQC}=\frac{\pi}{3}+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\geq\frac{\pi}{2}$$

이다, 따라서 $\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$이다.

[2] $\overline{\mathrm{BP}}\sin\frac{\pi}{3}=\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PQ}}\sin\theta$이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{PQ}}\sin\theta\times\frac{2}{\sqrt{3}}$이다.

[3] $a=\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{BP}}\cos\frac{\pi}{3}+\overline{\mathrm{PQ}}\cos\theta$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}+\cos\theta\right)=a$이다.

같은 방법으로 $\overline{\mathrm{QR}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sqrt{3}}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\overline{\mathrm{QR}}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}+\sin\theta\right)=1-a$이다. 따라서

$\overline{\mathrm{PQ}}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}+\cos\theta\right)\times\overline{\mathrm{QR}}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}+\sin\theta\right)=a(1-a)$이고

$\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}+\cos\theta\right)\times\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}+\sin\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{4\sin\theta\cos\theta}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2\sin2\theta}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\frac{3a(1-a)}{\sqrt{3}+2\sin2\theta}$이다.

또 $a(1-a)=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$이고, $\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$이므로 $2\sqrt{3}\leq\sqrt{3}+2\sin2\theta\leq\sqrt{3}+2$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}\leq\frac{3}{4}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{8}$이고 등호는 $a=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 성립한다.

그러므로 구하는 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{8}$이다.