[숙명여자대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2026학년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(약학부) / 문항 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	근과 계수와의 관계, 원의 방정식, 부분적분, 치환적분, 넓이
예상 소요 시간	90 분 / 전체 100 분	

2. 문항 및 제시문

<가>

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이다.

<나>

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

이다. 우변을 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

이고 이 등식은 x에 관한 항등식이므로 양변에 있는 동류항의 계수를 비교하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

이다. 이를 정리하면 다음과 같은 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 알 수 있다.

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

이다.

제시문 <가>와 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 점 (a, b)가 원점을 중심으로 하고 반지름이 2인 원 위의 점일 때 $a+b$의 값의 범위를 구하시오.

1-2. x에 대한 삼차방정식 $x^3-(2+\sqrt{2})t\,x^2+(1+2\sqrt{2})t^2x-\sqrt{2}=0$의 세 실근을 α, β, γ라고 하자. 점 (α, β)가 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\gamma>0$인 원 위의 점이 되게 하는 양의 실수 t를 구하시오.

계 열 문 항

<다>
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 함수 $f(x)g(x)$를 x에 대하여 미분하면

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이다.
구간 $[a, b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수가 연속이면

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

이다.

<라>
닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

제시문 <다>와 <라>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

수열 $\{a_n\}$과 $\{p_n\}$은 다음과 같이 주어져 있다.

$$a_n=\int_0^1 x^n(1-x)^n dx\,,\qquad p_n=\int_0^1(1-y^2)^n dy$$

2-1. $\int_0^1 x^n(1-x)^n dx=b_n\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}dx$를 만족시키는 b_n을 구하고 $a_n=c_n n!$을 만족시키는 c_n을 구하시오.

2-2. 치환적분법을 이용하여 $a_n=d_n p_n$을 만족하는 d_n을 구하시오.

계 열 문 항

<마>
절댓값을 포함한 함수의 그래프는 다음과 같이 절댓값을 포함하지 않는 함수로 나타낼 수 있다.

$$y = |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

<바>
두 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$를 포함하는 열린구간에서 $f(x) \geq g(x)$이고 연속이다. 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 및 두 직선 $x = a, x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\, dx$$

제시문 <마>와 <바>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

좌표평면에 다음 곡선

$$3|y - 2x| + 2x^2 = 8$$

이 주어져 있다.

3-1. 위 곡선을 좌표평면에 그리시오.

3-2. 위 곡선으로 둘러싸인 영역 중 $y \geq 0$을 만족하는 도형의 넓이를 구하시오.

3. 출제 의도

함수, 이차방정식, 함수의 미분과 적분, 도함수의 활용, 정적분, 합성함수 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문제들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문제들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 함수의 합성, 함수의 그래프, 접선의 방정식, 이차방정식, 연립방정식, 정적분, 치환적분법 등에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 <가>, <나>	[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
문항 1-1	[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-06] 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다. [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다. [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
문항 1-2	[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 <다>, <라>	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 2-1	[12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 2-2	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문 <마>, <바>	[10수학01-15] 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 3-1	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. [10수학01-15] 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다. [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
문항 3-2	[12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	황선욱	미래엔	2020	61-68 89-105 139-142
	고등학교 수학	김원경	비상교육	2020	49-54 71-87
	고등학교 수학I	홍성복	지학사	2020	115-162
	고등학교 수학II	이준열	천재교육	2020	74-77 132-139
	고등학교 미적분	김원경	비상교육	2020	99-108 126-137
기타					

5. 문항 해설

제시문 <가>, <나>에서는 다항식의 곱셈 공식과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 소개하고 삼차방정식의 근과 계수와의 관계를 유도한다. <문제 1-1>에서는 원의 성질, 이차방정식의 근과 계수 및 판별식을 이용하여 이차부등식을 유도하고 이를 해결할 수 있는지를 평가한다. <문제 1-2>에서는 원의 성질과 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>에서는 함수의 곱의 미분법과 부분적분법에 대한 기본 공식을 서술하고 있으며 <라>는 치환적분법의 기본 공식을 서술하고 있다. <문제 2-1>은 부분적분법을 이용하여 주어진 수열 간의 관계를 유도하고 이를 반복 수행하여 팩토리얼 식으로 표시할 수 있는지를 평가한다. <문제 2-2>는 두 함수를 연결하는 치환식을 유도하고 이를 기반으로 치환적분하여 관계식을 유도할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <마>, <바>에서는 절댓값을 포함한 함수를 변수의 범위를 제한함으로써 절댓값이 없는 형태로 나타내는 방법을 소개한다. 또한 닫힌구간에서 연속인 두 함수와 $x=a, x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 소개한다. <문제 3-1>에서는 절댓값을 포함한 이차함수의 표현을 이해하고, 절댓값을 포함하지 않는 함수로 표현하여 그래프를 그릴 수 있는지를 평가한다. 또한 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하고 있는지를 평가한다. <문제 3-2>에서는 앞서 구한 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다. 이 과정에서 다항함수의 정적분 계산 및 원점 대칭인 도형의 넓이를 정적분의 성질을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 문제 <1-1>, <1-2>

① <1-1>에서 원의 방정식의 의미를 이해한다.
② <1-1>에서 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이해한다.
③ <1-1>에서 판별식으로부터 얻은 이차부등식을 풀 수 있다.
④ <1-2>에서 원의 방정식의 의미를 이해한다.
⑤ <1-2>에서 삼차방정식의 근과 계수와의 관계를 이해한다.
⑥ <1-2>에서 이차 및 삼차방정식의 근을 구할 수 있다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <2-1>, <2-2>

① <2-1>에서 부분적분을 이용하여 b_n을 구할 수 있다.
② <2-1>에서 $n-1 \ge k$인 k에 대해, $\int_0^1 x^{n+k}(1-x)^{n-k}dx = \frac{n-k}{n+k+1}\int_0^1 x^{n+k+1}(1-x)^{n-(k+1)}dx$의 관계를 보일 수 있다.
③ <2-1>에서 부분적분을 반복하여 c_n을 구할 수 있다.
④ <2-2>에서 $x = \frac{1+y}{2}$ 또는 $y = 2x-1$의 형태로 치환할 수 있다.
⑤ <2-2>에서 치환적분을 통해 $a_n = \frac{1}{2^{2n+1}}\int_{-1}^1 (1-y^2)^n dy$임을 보일 수 있다.
⑥ <2-2>에서 $(1-y^2)^n$이 우함수임을 이용하여 d_n을 구할 수 있다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <3-1>, <3-2>
① <3-1>에서 절댓값을 포함하지 않는 식으로 나타낼 수 있다.
② <3-1>에서 각각 경우에 대해서 이차함수의 그래프를 그릴 수 있다.
③ <3-1>에서 이차함수와 직선의 교점을 구할 수 있다.
④ <3-2>에서 위 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $y=2x$에 의해 이등분됨을 파악할 수 있다.
⑤ <3-2>에서 두 함수로 둘러싸인 도형의 넓이를 적분으로 나타낼 수 있다.
⑥ <3-2>에서 이차함수의 적분을 계산할 수 있다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

7. 예시 답안

■ 1-1.

점 (a,b)가 원점을 중심으로 하고 반지름이 2인 원 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$를 만족시킨다.
$a+b=t$라고 하면 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$로부터 $t^2=4+2ab$이고 $ab=\dfrac{t^2-4}{2}$이다. a,b는 이차방정식

$$x^2-(a+b)x+ab=x^2-tx+\frac{t^2-4}{2}=0$$

의 두 실근이다. 이차방정식이 두 실근을 가지므로 판별식 $D=t^2-\dfrac{4(t^2-4)}{2}=-t^2+8\geq 0$이다.
t에 대한 이차부등식을 풀면 $-2\sqrt{2}\leq t\leq 2\sqrt{2}$이다. 따라서 $a+b$의 범위는 $-2\sqrt{2}\leq a+b\leq 2\sqrt{2}$이다.

■ 1-2.

삼차방정식의 근과 계수의 관계로부터

$$\alpha+\beta+\gamma=(2+\sqrt{2})t,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=(1+2\sqrt{2})t^2,\quad \alpha\beta\gamma=\sqrt{2}$$

이다. 점 (α,β)가 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\gamma>0$인 원 위의 점이므로 $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$을 만족시킨다. 한편 다항식의 곱셈 공식을 이용하면

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\{(2+\sqrt{2})t\}^2-2(1+2\sqrt{2})t^2=4t^2$$

이다. 따라서 $2\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4t^2$이고 γ와 t가 모두 양의 실수이므로 $\gamma=\sqrt{2}\,t$이다. 그러므로 $\alpha+\beta=(2+\sqrt{2})t-\gamma=2t$이고 $\alpha\beta=(1+2\sqrt{2})t^2-\gamma(\alpha+\beta)=t^2$이다. α,β는 X에 대한 이차방정식 $X^2-2tX+t^2=0$의 두 근이다. 따라서, $\alpha=t$이고 $\beta=t$이다. 따라서 $\sqrt{2}=\alpha\beta\gamma=\sqrt{2}\,t^3$이고 이를 정리하면 $t^3-1=0$이다. t는 양의 실수이므로 $t=1$이다.

■ 2-1.

부분적분을 이용하면 자연수 n에 대해서,

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(1-x)^n\right]_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}dx$$
$$= \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}dx$$

이므로 $b_n = n/(n+1)$이다. 여기서, 우변의 $\dfrac{n}{n+1}$의 분모는 좌변의 피적분함수의 x의 지수에 1을 더한 값이고 분자는 $(1-x)$의 지수이다. 또한, 부분적분을 거듭할수록 x의 지수는 1씩 증가하고 $1-x$의 지수는 1씩 감소한다. 즉, $n-1 \ge k$인 k에 대해,

$$\int_0^1 x^{n+k}(1-x)^{n-k}dx = \left[\frac{1}{n+k+1}x^{n+k+1}(1-x)^{n-k}\right]_0^1 + \frac{n-k}{n+k+1}\int_0^1 x^{n+k+1}(1-x)^{n-(k+1)}$$
$$= \frac{n-k}{n+k+1}\int_0^1 x^{n+k+1}(1-x)^{n-(k+1)}dx$$

가 성립한다. 우변 피적분함수의 $1-x$의 지수가 0이 될 때까지 부분적분을 반복하면

$$a_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n dx = \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+2}\cdots\frac{1}{2n}\int_0^1 x^{2n}(1-x)^0 dx = \frac{n!}{(2n+1)(2n)\cdots(n+1)}$$

가 된다. 즉,

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)(2n)\cdots(n+1)} = \frac{n!n!}{(2n+1)!}$$

이므로 $c_n = \dfrac{1}{(2n+1)\cdots(n+1)} = \dfrac{n!}{(2n+1)!}$이다.

■ 2-2.

$x^n(1-x)^n$의 꼴이 $(1-y^2)^n = (1+y)(1-y)^n$의 꼴로 표시되기 위해서는 $x = \dfrac{1+y}{2}$ 또는 $y = 2x-1$의 형태로 치환해야 한다. 이때 y에 대한 적분구간은 $[-1,1]$이 된다. 그러므로

$$a_n = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+y}{2}\right)^n\left(\frac{1-y}{2}\right)^n\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2^{2n+1}}\int_{-1}^1 (1-y^2)^n dy$$

이다. 한편, $(1-y^2)^n$은 우함수이므로

$$a_n = \frac{1}{2^{2n+1}}\int_{-1}^1 (1-y^2)^n dy = \frac{1}{2^{2n}}\int_0^1 (1-y^2)^n dy$$

가 되며 $d_n = \dfrac{1}{2^{2n}}$이다.

■ 3-1.

절댓값을 포함하지 않는 식으로 나타내기 위해 다음의 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

(i) $y \ge 2x$인 경우
(ii) $y < 2x$인 경우

(i) $y \ge 2x$이면 주어진 식은 다음과 같다.

$$3(y-2x)+2x^2 = 8$$

x에 관해 정리하면,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}x^2+2x+\frac{8}{3} \\ &= -\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{6} \end{aligned}$$

을 얻는다.

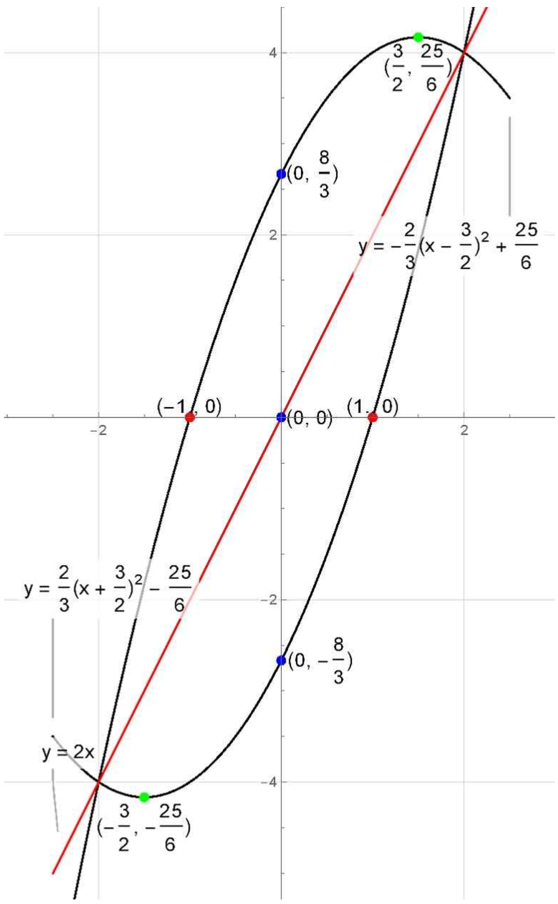
(ii) $y<2x$이면 주어진 식은 다음과 같다.

$$-3(y-2x)+2x^2=8$$

같은 방식으로 정리하면,

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}x^2+2x-\frac{8}{3} \\ &= \frac{2}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{6} \end{aligned}$$

(i)와 (ii)를 이용하면 주어진 곡선의 모양은 다음과 같다.



■ 3-2.

위 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하자. 이 영역은 원점 대칭이므로 $y \geq 0$을 만족하는 도형의 넓이는 $\frac{S}{2}$가 된다. 또한 $y = 2x$에 의해 이등분된다. 그러므로 구하고자 하는 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{S}{2} = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{2}{3}x^2 + 2x + \frac{8}{3} - 2x\right)dx = \frac{64}{9}$$

참고: 대칭성을 사용하지 않고 다음과 같이 직접 계산을 통해 답을 구할 수도 있다.

$$\frac{S}{2} = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{2}{3}x^2 + 2x + \frac{8}{3}\right)dx + \int_{1}^{2} \left\{\left(-\frac{2}{3}x^2 + 2x + \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3}\right)\right\}dx$$

$$= \frac{64}{9}$$