[숙명여자대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2026학년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	근과 계수와의 관계, 원의 방정식, 치환적분, 접선, 넓이
예상 소요 시간	90 분 / 전체 100 분	

2. 문항 및 제시문

<가>

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이다.

<나>

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

이다. 우변을 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

$a\neq 0$이므로 양변을 a로 나누면

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

이고 이 등식은 x에 관한 항등식이므로 양변에 있는 동류항의 계수를 비교하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

이다. 이를 정리하면 다음과 같은 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 알 수 있다.

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

이다.

제시문 <가>와 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 점 (a,b)가 원점을 중심으로 하고 반지름이 2인 원 위의 점일 때 $a+b$의 값의 범위를 구하시오.

1-2. x에 대한 삼차방정식 $x^3-(2+\sqrt{2})tx^2+(1+2\sqrt{2})t^2x-\sqrt{2}=0$의 세 실근을 α, β, γ라고 하자. 점 (α, β)가 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\gamma>0$인 원 위의 점이 되게 하는 양의 실수 t를 구하시오.

<다>
함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$F(x)=F(g(t))$$

이다. 이때 $F(x)$를 t에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\times\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$

이므로

$$F(x)+C=\int f(g(t))g'(t)dt$$

이다. 이때 $F(x)+C=\int f(x)dx$이므로 다음이 성립한다.

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

이와 같이 한 변수를 다른 변수로 바꾸어 적분하는 방법을 치환적분법이라고 한다.

<라>
닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

이다. 여기서 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 치환적분법에 따라

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt=F(g(t))+C$$

가 성립한다. 이때 $g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때, α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt=\Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=F(b)-F(a)$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

제시문 <다>와 <라>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

2-2. 위의 적분식을 이용하여 다음의 적분값을 구하시오.

$$\int_{-24}^{26} \frac{\sqrt{\ln(x+25)}}{\sqrt{\ln(x+25)}+\sqrt{\ln(27-x)}}\,dx$$

<마>
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다.

<바>
두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

제시문 <마>와 <바>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 점 $A(-3, 5)$를 지나고 곡선 $y=x^3-5x^2+x+8$에 접하는 세 직선을 구하시오.

3-2. 위의 세 직선을 기울기가 작은 순서대로 정리하여 각각 L_1, L_2, L_3이라고 하자. 두 직선 L_1, L_2가 접하는 접점을 각각 B, C라고 할 때, 이 곡선 위의 점 B에서 점 C까지의 부분과 선분 AB, AC로 둘러싸인 도형의 면적을 구하시오.

3. 출제 의도

함수, 이차방정식, 함수의 미분과 적분, 도함수의 활용, 정적분, 합성함수 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문제들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문제들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 함수의 합성, 함수의 그래프, 접선의 방정식, 이차방정식, 연립방정식, 정적분, 치환적분법 등에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 <가>, <나>	[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
문항 1-1	[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-06] 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다. [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다. [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
문항 1-2	[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 <다>, <라>	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문항 2-1	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문항 2-2	[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [10수학04-05] 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
제시문 <마>, <바>	[12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 3-1	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문항 3-2	[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	황선욱	미래엔	2020	61-68 95-98 139-142
	고등학교 수학	김원경	비상교육	2020	49-54 226-231 209-211
	고등학교 수학I	김원경	비상교육	2020	43-47
	고등학교 수학II	이준열	천재교육	2020	74-77 132-139
	고등학교 미적분	김원경	비상교육	2020	99-108 126-137
기타					

5. 문항 해설

제시문 <가>, <나>에서는 다항식의 곱셈 공식과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 소개하고 삼차방정식의 근과 계수와의 관계를 유도한다. <문제 1-1>에서는 원의 성질, 이차방정식의 근과 계수 및 판별식을 이용하여 이차부등식을 유도하고 이를 해결할 수 있는지를 평가한다. <문제 1-2>에서는 원의 성질과 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>, <라>에서는 치환적분법과 치환적분법을 이용하여 정적분을 구하는 방법을 소개한다. <문제 2-1>에서는 주어진 제시문을 따라 치환적분법을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는지를 평가한다. <문제 2-2>에서는 로그함수와 무리함수가 연속이 되는 조건을 이해하고 치환적분법을 활용하여 주어진 정적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <마>, <바>에서는 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식과 두 곡선 사이의 넓이를 구하는 방법을 소개한다. <문제 3-1>에서는 주어진 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가한다. <문제 3-2>에서는 함수의 그래프의 개형을 이해하고 이를 활용하여 두 직선과 곡선으로 둘러싸인 넓이를 계산할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.
▶ 문제 <1-1>, <1-2>
① <1-1>에서 원의 방정식의 의미를 이해한다.
② <1-1>에서 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이해한다.
③ <1-1>에서 판별식으로부터 얻은 이차부등식을 풀 수 있다.
④ <1-2>에서 원의 방정식의 의미를 이해한다.
⑤ <1-2>에서 삼차방정식의 근과 계수와의 관계를 이해한다.
⑥ <1-2>에서 이차 및 삼차방정식의 근을 구할 수 있다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <2-1>, <2-2>
① <2-1>에서 $a+b-x=t$로 치환할 수 있다.
② <2-1>에서 적분 범위를 구할 수 있다.
③ <2-1>에서 $\dfrac{dx}{dt}=-1$임을 이용한다.
④ <2-2>에서 피적분함수가 연속임을 확인한다.
⑤ <2-2>에서 <2-1>의 관계식 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$를 이용한다.
⑥ <2-2>에서 구하고자 하는 정적분값을 I로 두고 계산할 수 있다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <3-1>, <3-2>
① <3-1>에서 삼차함수의 도함수를 구할 수 있다.
② <3-1>에서 곡선 위의 점 (a, a^3-5a^2+a+8)에서의 접선의 방정식을
$y-(a^3-5a^2+a+8)=(3a^2-10a+1)(x-a)$으로 나타낼 수 있다.
③ <3-1>에서 삼차방정식을 풀고 접선의 방정식을 구할 수 있다.
④ <3-2>에서 구하고자 하는 도형을 그릴 수 있다.
⑤ <3-2>에서 두 함수로 둘러싸인 영역의 넓이를 적분으로 표시할 수 있다.
⑥ <3-2>에서 적분구간을 나누어 계산할 수 있다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)

6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

7. 예시 답안

■ 1-1.

점 (a,b)가 원점을 중심으로 하고 반지름이 2인 원 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$를 만족시킨다.

$a+b=t$라고 하면 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$로부터 $t^2=4+2ab$이고 $ab=\dfrac{t^2-4}{2}$이다. a,b는 이차방정식

$$x^2-(a+b)x+ab=x^2-tx+\frac{t^2-4}{2}=0$$

의 두 실근이다. 이차방정식이 두 실근을 가지므로 판별식 $D=t^2-\dfrac{4(t^2-4)}{2}=-t^2+8\geq 0$이다.

t에 대한 이차부등식을 풀면 $-2\sqrt{2}\leq t\leq 2\sqrt{2}$이다. 따라서 $a+b$의 범위는 $-2\sqrt{2}\leq a+b\leq 2\sqrt{2}$이다.

■ 1-2.

삼차방정식의 근과 계수의 관계로부터

$$\alpha+\beta+\gamma=(2+\sqrt{2})t,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=(1+2\sqrt{2})t^2,\quad \alpha\beta\gamma=\sqrt{2}$$

이다. 점 (α,β)가 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\gamma(>0)$인 원 위의 점이므로 $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$을 만족시킨다. 한편 다항식의 곱셈 공식을 이용하면

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\{(2+\sqrt{2})t\}^2-2(1+2\sqrt{2})t^2=4t^2$$

이다. 따라서 $2\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4t^2$이고 γ와 t가 모두 양의 실수이므로 $\gamma=\sqrt{2}\,t$이다. 그러므로 $\alpha+\beta=(2+\sqrt{2})t-\gamma=2t$이고 $\alpha\beta=(1+2\sqrt{2})t^2-\gamma(\alpha+\beta)=t^2$이다. α,β는 X에 대한 이차방정식 $X^2-2tX+t^2=0$의 두 근이다. 따라서, $\alpha=t$이고 $\beta=t$이다. 따라서 $\sqrt{2}=\alpha\beta\gamma=\sqrt{2}\,t^3$이고 이를 정리하면 $t^3-1=0$이다. t는 양의 실수이므로 $t=1$이다.

■ 2-1.

$a+b-x=t$, 즉 $x=a+b-t$로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=-1$이다.

$x=a$일 때 $t=b$이고 $x=b$일 때 $t=a$이므로

$$\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(a+b-t)(-1)dt=\int_a^b f(a+b-t)dt$$

이다.

■ 2-2.

로그함수 $\ln x$는 $x>0$일 때 연속이므로, 닫힌구간 $[-24,26]$에서 $\ln(x+25)$와 $\ln(27-x)$는 모두 연속이다. 이 구간에서 두 함수 모두 0 이상의 값을 가지므로 $\sqrt{\ln(x+25)}$와 $\sqrt{\ln(27-x)}$, 모두 연속이다. 또한 $\ln(x+25)$와 $\ln(27-x)$는 동시에 0의 값을 가질 수 없으므로 피적분함수

$$\frac{\sqrt{\ln(x+25)}}{\sqrt{\ln(x+25)}+\sqrt{\ln(27-x)}}$$

이 적분 구간 $[-24,26]$에서 연속임을 알 수 있다.

이제 우리가 구하고자 하는 적분의 값을 I 라 하자. 즉,

$$I=\int_{-24}^{26}\frac{\sqrt{\ln(x+25)}}{\sqrt{\ln(x+25)}+\sqrt{\ln(27-x)}}\,dx \qquad (1)$$

문제 2-1에서 주어진 적분식을 이용하면 I를 다음과 같이 표현할 수 있음을 알 수 있다.

$$I=\int_{-24}^{26}\frac{\sqrt{\ln(27-x)}}{\sqrt{\ln(x+25)}+\sqrt{\ln(27-x)}}\,dx \qquad (2)$$

식 (1)과 (2)의 양변을 서로 더하면 다음과 같다.

$$2I=\int_{-24}^{26}\frac{\sqrt{\ln(x+25)}}{\sqrt{\ln(x+25)}+\sqrt{\ln(27-x)}}\,dx+\int_{-24}^{26}\frac{\sqrt{\ln(27-x)}}{\sqrt{\ln(x+25)}+\sqrt{\ln(27-x)}}\,dx$$

여기에서 식의 우변을 계산하면

$$\text{우변}=\int_{-24}^{26}\frac{\sqrt{\ln(x+25)}+\sqrt{\ln(27-x)}}{\sqrt{\ln(x+25)}+\sqrt{\ln(27-x)}}\,dx=\int_{-24}^{26}1\,dx=50$$

즉 $2I=50$이고, 이는 $I=25$임을 의미한다.

■ 3-1.

$y=x^3-5x^2+x+8$에서 $y'=3x^2-10x+1$이다. 따라서 곡선 위의 점 $(a,\, a^3-5a^2+a+8)$에서의 접선의 방정식은 $y-(a^3-5a^2+a+8)=(3a^2-10a+1)(x-a)$이다. 이 직선이 점 $A(-3,5)$를 지나므로 $5-(a^3-5a^2+a+8)=(3a^2-10a+1)(-3-a)$이다. 이 식을 정리하면 $2a(a+5)(a-3)=0$이다. 그러므로 $a=-5,0,3$이다. 각각의 a에 대한 직선의 방정식을 구하면

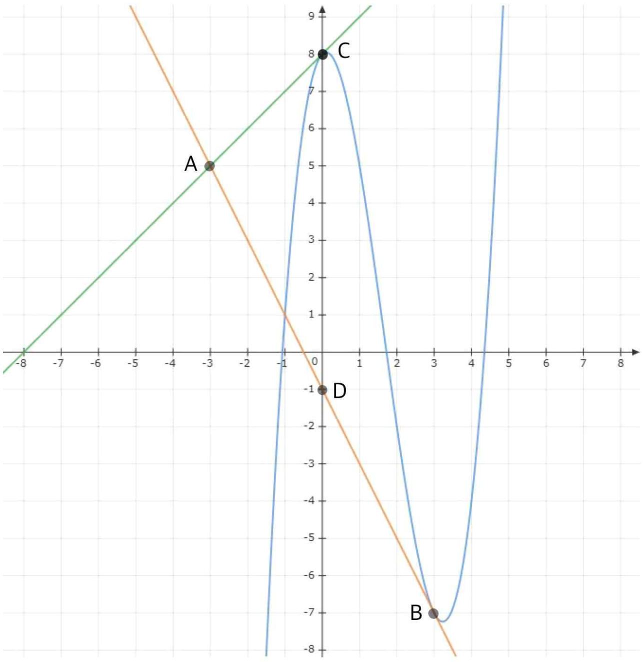
$a=-5$일 때 $y=126x+383$,

$a=0$일 때 $y=x+8$,

$a=3$일 때 $y=-2x-1$이다.

■ 3-2.

직선 L_1은 $y=-2x-1$이고 직선 L_2는 $y=x+8$이다. 아래 그림에서 빨간색 직선이 L_1이고 녹색 직선이 L_2이다.



따라서 구하는 면적을 S라 하면 S는 삼각형 ACD의 면적과 닫힌구간 $[0,3]$에서 곡선 $y=x^3-5x^2+x+8$과 세 직선 $y=-2x-1$, $x=0$, $x=3$로 둘러싸인 도형의 넓이를 합한 것과 같다. 그러므로

$$S=\frac{1}{2}\times 3\times 9+\int_0^3 (x^3-5x^2+x+8)-(-2x-1)\,dx$$
$$=\frac{27}{2}+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right]_0^3=\frac{117}{4}$$

이다.