계 열 문 항

<가>

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이다.

<나>

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

이다. 우변을 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

$a\neq 0$이므로 양변을 a로 나누면

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

이고 이 등식은 x에 관한 항등식이므로 양변에 있는 동류항의 계수를 비교하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

이다. 이를 정리하면 다음과 같은 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 알 수 있다.

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

이다.

제시문 <가>와 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 점 (a,b)가 원점을 중심으로 하고 반지름이 2인 원 위의 점일 때 $a+b$의 값의 범위를 구하시오.

1-2. x에 대한 삼차방정식 $x^3-(2+\sqrt{2})t\,x^2+(1+2\sqrt{2})t^2x-\sqrt{2}=0$의 세 실근을 α,β,γ라고 하자. 점 (α,β)가 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\gamma>0$인 원 위의 점이 되게 하는 양의 실수 t를 구하시오.

계 열 문 항

<다>

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$F(x)=F(g(t))$$

이다. 이때 $F(x)$를 t에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\times\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$

이므로

$$F(x)+C=\int f(g(t))g'(t)dt$$

이다. 이때 $F(x)+C=\int f(x)dx$이므로 다음이 성립한다.

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

이와 같이 한 변수를 다른 변수로 바꾸어 적분하는 방법을 치환적분법이라고 한다.

<라>

닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

이다. 여기서 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 치환적분법에 따라

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt=F(g(t))+C$$

가 성립한다. 이때 $g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때, α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt=\Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=F(b)-F(a)$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

제시문 <다>와 <라>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

2-2. 위의 적분식을 이용하여 다음의 적분값을 구하시오.

$$\int_{-24}^{26}\frac{\sqrt{\ln(x+25)}}{\sqrt{\ln(x+25)}+\sqrt{\ln(27-x)}}dx$$

계 열 문 항

<마>
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다.

<바>
두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

제시문 <마>와 <바>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 점 $A(-3, 5)$를 지나고 곡선 $y=x^3-5x^2+x+8$에 접하는 세 직선을 구하시오.

3-2. 위의 세 직선을 기울기가 작은 순서대로 정리하여 각각 L_1, L_2, L_3이라고 하자. 두 직선 L_1, L_2가 접하는 접점을 각각 B, C라고 할 때, 이 곡선 위의 점 B에서 점 C까지의 부분과 선분 AB, AC로 둘러싸인 도형의 면적을 구하시오.