계 열 문 항

<가>

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

<나>

함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면, 최대·최소 정리에 따라 함수 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 이때 이 구간에서 $f(x)$의 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이 된다.

제시문 <가>, <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 이차방정식 $x^2-(e^k-2)x-2e^k+1=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$이 최소가 되는 실수 k의 값과 그때 $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하시오.

1-2. 삼차함수 $f(x)=(x^2-1)(x+3k)$의 극댓값과 극솟값의 합이 최대가 되는 실수 k의 값과 그때 극댓값과 극솟값의 합을 구하시오. (단, $-\sqrt{3}\le k\le\sqrt{3}$)

계 열 문 항

<다>
명제 $p \rightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \ \sim p$도 참이므로 어떤 명제가 참임을 증명할 때에는 그 대우가 참임을 증명해도 된다.

<라>
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c) = k$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. 이것을 사잇값의 정리라고 한다.
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$은 a와 b 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다.

제시문 <다>, <라>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(a) > 0$, $f(b) > 0$이다. 다음 명제의 대우를 말하고 그것이 참임을 증명하시오.

> 방정식 $f(x) = 0$이 열린구간 (a, b)에서 실근을 갖지 않는다면 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f(x) > 0$이다.

2-2. 양수 k에 대하여 삼차방정식 $x^3 - 2x = k$가 닫힌구간 $[-k, k]$에서 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구하시오.

계 열 문 항

<마>
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 A는

$$A=\int_a^b |f(x)|dx$$

<바>
함수 $f(x)$가 임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

<사>
점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

<아>
자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명할 때, 다음 두 가지를 증명하면 된다.
(i) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.
자연수에 대한 어떤 명제가 참임을 증명하는 이와 같은 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

제시문 <마>, <바>, <사>, <아>를 읽고, 다음 조건을 만족시키는 a_n에 대하여 문제에 답하시오.

> 자연수 n에 대하여 $a_1=1$이고 $a_n < a_{n+1}$이다. 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{e^2-1}e^{x^2}$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a_n$, $x=a_{n+1}$로 둘러싸인 도형의 넓이 A_n이 $A_n=e^{2n-1}$이다.

3-1. x축, y축에 모두 접하고 중심이 점 (a_n, a_n)인 원이 직선 $y=\left(\tan\frac{1}{n}\right)x$와 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이를 l_n이라 할 때 $\lim_{n\to\infty} l_n^2$의 값을 구하시오.

3-2. 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$\sum_{m=1}^{n^2}\frac{1}{a_m}\ge n$$