계 열 문 항

<가>

● 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에서 성립한다는 것은 수학적 귀납법을 이용하여 증명할 수 있다. 수학적 귀납법을 이용하여 다음 명제를 증명해 보자.

㉠ $n \geq 3$인 모든 자연수에 대하여
$$n \ln n > (n-1)\ln(n+1)$$
이다.

먼저 $n=3$일 때를 생각하면,
$$(\text{좌변}) = 3\ln 3 = \ln 3^3 = \ln 27,\ (\text{우변}) = 2\ln 4 = \ln 4^2 = \ln 16$$
이다. 따라서 $n=3$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

$n=k\,(k \geq 3)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$$k\ln k > (k-1)\ln(k+1)$$
이다. $n=k+1$일 때를 생각하면,
$$\begin{aligned}(k+1)\ln(k+1) &= (k+1)\ln(k+1) - k\ln k + k\ln k \\ &> (k+1)\ln(k+1) - k\ln k + (k-1)\ln(k+1) \\ &= 2k\ln(k+1) - k\ln k = k\ln\frac{(k+1)^2}{k} = k\ln\left(k+2+\frac{1}{k}\right) \\ &> k\ln(k+2)\end{aligned}$$
이다. 따라서 $(k+1)\ln(k+1) > k\ln(k+2)$이므로, $n=k+1$일 때도 성립한다.

● 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능할 때, (a,b)의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 $[a,b]$에서 증가하고, $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 $[a,b]$에서 감소한다.

$x \geq 1$인 모든 실수에 대하여 함수 $f(x) = x\ln x$는 증가함을 보이자. $f(x)$의 도함수는
$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$
이다. 한편 $x \geq 1$일 때, $\ln x + 1 \geq 1 > 0$이므로 $f'(x) > 0$이다. 따라서 $f(x)$는 $x \geq 1$에서 증가한다.

제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. $n \geq 3$인 모든 자연수에 대하여
$$(n+1)\ln n > n\ln(n+1)$$
임을 수학적 귀납법으로 보이시오.

1-2. $x \geq 3$인 모든 실수에 대하여
$$\frac{\ln x}{x} > \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$
임을 보이시오. (단, 무리수 $e = 2.72$이다.)

계 열 문 항

<나>

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라고 하며, 그때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

함수 $f(x)$에서 $x=b$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(b)$이면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라고 하며, 그때의 함숫값 $f(b)$를 극솟값이라고 한다. 이때, 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다. 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 도함수 $f'(x)$의 부호를 이용하여 극값을 판정할 수 있다. 예를 들면, 사차함수 $f(x)=x^4-2x^2$은 도함수가

$$f'(x)=4x(x+1)(x-1)$$

이므로, $x=0$에서 극대이고, 극댓값은 $f(0)=0$, 그리고 $x=-1$, $x=1$에서 극소이고, 극솟값은

$$f(-1)=f(1)=-1$$

이다. 이 경우 함수 $f(x)$의 극값은 0과 -1이므로 서로 다른 극값의 개수는 2이다.

이제 삼차함수

$$g(x)=2x^3+3x^2-12x-c$$

에 대하여, 실수 c의 값의 범위가 $-7<c<20$일 때, 함수 $|g(x)|$의 서로 다른 극값의 개수가 2가 되게 하는 실수 c의 값을 구해 보자. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수는

$$g'(x)=6(x+2)(x-1)$$

이다.

함수 $g(x)$는 $x=-2$, $x=1$에서 각각 극댓값 $g(-2)=20-c$, 극솟값 $g(1)=-7-c$를 갖는다. 이때, 실수 c의 값의 범위가 $-7<c<20$이므로 $g(-2)>0$이고 $g(1)<0$이다.

이제 함수 $|g(x)|$의 극대와 극소를 조사해 보자. $x=-2$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$|g(x)| \le |g(-2)|$$

이고, $x=1$을 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$|g(x)| \le |g(1)|$$

이므로, 함수 $|g(x)|$는 $x=-2$에서 극댓값,

$$|g(-2)|=|20-c|=20-c,$$

$x=1$에서 극댓값,

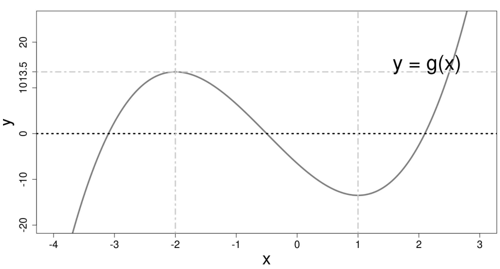
$$|g(1)|=|-7-c|=7+c$$

를 갖는다. 또한, 함수 $|g(x)|$는 $g(x)=0$을 만족시키는 x에서 극솟값을 갖는다.

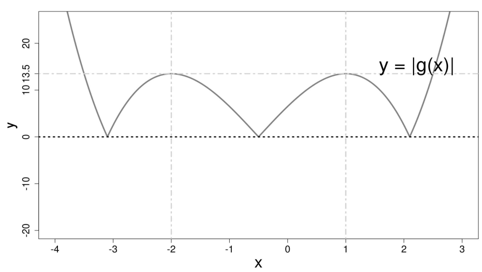
한편

$$|g(-2)| \ne 0,\ |g(1)| \ne 0$$

이므로 함수 $|g(x)|$의 서로 다른 극값의 개수가 2인 경우는 $|g(-2)|=|g(1)|$밖에 없다. 이때, 이를 만족시키는 실수 c의 값은 $\dfrac{13}{2}$이다. <그림 1>과 <그림 2>는 $c=\dfrac{13}{2}$일 때, $y=g(x)$의 그래프와 $y=|g(x)|$의 그래프를 각각 그린 것이다.



<그림 1>



<그림 2>

제시문 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 삼차함수 $g(x) = -4x^3 + 6x^2 + 24x + 5$와 다항함수 $f(x)$는

$$\int_0^x \{g'(t) + g(t)\}dt = x\,g(x) + f(x) + c \quad \cdots\cdots \quad ①$$

를 만족시킨다. 방정식 $f(x) = 0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 c의 값을 모두 구하시오.

2-2. 다항함수 $f(x)$는 문제 2-1의 ①을 만족시킨다. 이때, $-19 < c < 8$인 실수 c에 대하여 $|f(x)|$의 서로 다른 극값의 개수가 3이 되게 하는 실수 c의 값을 모두 구하시오.

계 열 문 항

<다>

㉡ 주머니1, 주머니2, $\cdots$, 주머니10에는 각각 동전들이 2^{10}개 들어 있다. 동전들은 진짜 동전과 가짜 동전으로 구분되며, 진짜 동전들의 무게는 모두 같고, 가짜 동전의 무게는 진짜 동전의 무게보다 1그램이 작다. 각 주머니의 동전들은 모두 진짜이거나 모두 가짜이고, 이 중 모두 가짜 동전들이 들어 있는 주머니는 1개 이상이다.

각각의 주머니k에서 k개, 즉, 주머니1에서 1개, 주머니2에서 2개, $\cdots$, 주머니10에서 10개의 동전을 꺼내, 그 꺼낸 동전들 $1+2+\cdots+10=55$개의 무게를 재었을 때, 그 무게의 합이 55개 동전 모두가 진짜일 때의 합보다 5그램이 작다고 하자. 이때, $5=1+4=2+3$이므로 가짜 동전들이 들어 있는 주머니들의 가능한 경우는 다음의 3가지이다.

<u>주머니5</u>, <u>주머니1과 주머니4</u>, <u>주머니2와 주머니3.</u>

㉢ 집합 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$의 모든 원소는 서로 다른 자연수이고 $b_1<b_2<\cdots<b_n$이면

$$1 \le b_1,\ 2 \le b_2,\ \cdots,\ n \le b_n$$

이다. 즉, 집합 B의 원소의 개수 n은 집합 B의 원소 중 가장 큰 자연수 b_n보다 작거나 같다.

집합 $A_{10}=\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\}$의 모든 원소는 서로 다른 자연수이고, 집합 A_{10}의 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합의 개수는 $2^{10}-1$이다. 이러한 $2^{10}-1$개의 부분집합들은 각각 원소의 합이 서로 다르다고 하자. 이때,

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10} \ge 2^{10}-1=1023 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

임을 증명할 수 있다. 집합 A_{10}의 원소 중 가장 큰 자연수를 x라고 하면

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10} \le x+(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-8)+(x-9)=10x-45$$

이고 (1)에 의해 $x \ge \frac{1}{10}(2^{10}+44)=106.8$이다. 집합 A_{10}의 예로는 집합

$$\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\},\ \{2^{10}+1, 2^{10}+2, 2^{10}+2^2, 2^{10}+2^3, \cdots, 2^{10}+2^9\}$$

등이 있다.

제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. ㉡에 있는 각각의 주머니k에서 2^{k-1}개의 동전을 꺼내, 그 꺼낸 모든 동전들의 무게를 잿을 때, 그 무게의 합이 꺼낸 동전 모두가 진짜일 때의 합보다 $2^4+2^5+2^8$그램이 작다면, 가짜 동전들이 들어 있는 주머니들은 무엇인가? 가능한 주머니들의 경우를 찾으시오. 또한 부등식 (1)에서 등호가 성립할 때, 제시문 <다>에서 주어진 집합 A_{10}의 한 예를 찾으시오.

3-2. 제시문 <다>에서 주어진 집합 A_{10}의 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합 $C_1, C_2, \cdots, C_N$의 개수는 $N = 2^{10} - 1$이다. $1 \le k \le N$인 자연수 k에 대하여, $S(C_k)$를 집합 C_k의 모든 원소들의 합이라고 할 때, 집합

$$C = \{S(C_1), S(C_2), \cdots, S(C_N)\}$$

의 서로 다른 원소의 개수를 구하고, 이 개수와 ⓒ을 이용하여 부등식 (1)을 보이시오. 또한 모든 원소가 서로 다른 10개의 자연수인 집합 중, 다음을 만족시키는 집합이 존재하는지를 판단하시오.

ⓐ 집합의 원소 중, 가장 큰 자연수가 104이다. ⓑ 공집합이 아닌 서로 다른 모든 부분집합의 원소의 합이 서로 다르다.