2024학년도
숙명여자대학교
대학별고사
문항카드

- 논술(자연) -

2-5. 문항카드 ⑤ <자연계열 1회차 1, 2, 3번 문항>

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">2024학년도 수시모집 논술우수자전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열 / 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학I, 수학II, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>연속함수, 도함수, 롤의 정리, 이계도함수, 함수의 증가와 감소, 정적분, 주기함수, 치환적분법, 이차방정식의 근과 계수의 관계, 방정식의 근</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">90분 / 전체 100분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 자료

<가>

● 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 $f''(x)<0$이면 그 구간에서 $f'(x)$는 감소한다. 이때,

1) 열린구간 (a,b)에 속하는 어떤 실수 c_1에 대하여 $f'(c_1)>0$이면, 열린구간 (a,c_1)에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 (a,c_1)에서 증가한다.

2) 열린구간 (a,b)에 속하는 어떤 실수 c_2에 대하여 $f'(c_2)<0$이면, 열린구간 (c_2,b)에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 (c_2,b)에서 감소한다.

● <롤의 정리>

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

<나>

①	함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(a)=0$, $f(b)=0$을 만족시킬 때, 열린구간 (a,b)에서 $f''(x)<0$이면, 닫힌구간 $[a,b]$에서 $f(x)\geq 0$이다.

● 함수 $g(x)=\sqrt{x}$, $h(x)=x$에 대하여, 부등식

$$\int_0^1 h(x)\,dx \leq \int_0^1 g(x)\,dx \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

가 성립함을 보이자.

함수 $F(x)=g(x)-h(x)$는 $F(0)=0$, $F(1)=0$이고,

열린구간 $(0,1)$에서 $F''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}<0$이다.

그러면 명제 ①에 의하여 닫힌구간 $[0,1]$에서 $F(x)\geq 0$이므로

이 구간에서 $h(x)\leq g(x)$이고 부등식 (1)이 성립한다.

제시문 <가>와 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. **제시문 <가>를 이용하여, 제시문 <나>에 있는 명제 ①이 참임을 증명하시오.**

1-2. **실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 열린구간 (a,b)에서 $f''(x)<0$을 만족시킨다.**

이때, $(b-a)\{f(a)+f(b)\} \le 2\int_a^b f(x)\,dx$ **임을 보이시오.**

<다>

함수 $y=f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$를 주기함수라 하고 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다.

두 주기함수의 곱의 정적분을 생각해보자.

예를 들어, 연속함수 $G(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $G(x+\pi)=G(x)$를 만족시킬 때,

임의의 자연수 n에 대하여 $a=\int_0^{2\pi} G(x)\sin x\,dx,\quad b=\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} G(x)\sin x\,dx$ 라 하면,

$a=b=0$임을 다음과 같이 보일 수 있다.

$x-2n\pi=t$로 놓으면, $\dfrac{dx}{dt}=1$이고, $b=\int_0^{2\pi} G(t+2n\pi)\sin(t+2n\pi)\,dt=\int_0^{2\pi} G(t)\sin t\,dt=a$이다.

이제 정적분의 성질을 이용하여 적분 구간을 나누면

$$a=\int_0^{2\pi} G(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi} G(x)\sin x\,dx+\int_\pi^{2\pi} G(x)\sin x\,dx \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

이다.

이때, $\int_\pi^{2\pi} G(x)\sin x\,dx$의 값을 구하기 위해, $x-\pi=u$로 놓으면 $\dfrac{dx}{du}=1$ 이고

$\int_\pi^{2\pi} G(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi} G(u+\pi)\sin(u+\pi)\,du=-\int_0^{\pi} G(u)\sin u\,du$ 이다.

따라서 (1)에 의하여 $a=0$이다.

<라>

$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{e^x+1}\,dx$의 값을 생각해보자.

$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{e^x+1}\,dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx=-\left[\ln(1+e^{-x})\right]_{-1}^{1}=-\ln\dfrac{1+e^{-1}}{1+e}=1$ 이다.

한편, $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{e^x+1}\,dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx$ 이다.

제시문 <다>와 <라>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 연속함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$를 만족시키고, 연속함수 $h(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $h(x+2)=h(x)$를 만족시키고 $h(x)=\begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 2-x & (1 \le x < 2) \end{cases}$ 이다.

정적분 $\int_0^2 g(x)h(x)dx$의 값을 A라 할 때, 임의의 자연수 n에 대하여 정적분 $\int_{2n}^{2(n+1)} g(x)h(x)dx$, $\int_0^1 g(x)dx$ 의 값을 각각 구하시오.

2-2. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고 $f(x)f(-x)=1$을 만족시킬 때, 정적분 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\{f(x)\}^4+1}dx$ 의 값을 구하시오.

<마>

● <이차방정식의 근과 계수의 관계>

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$ 이다.

<바>

② 이차방정식 $F(x)=0$의 두 근이 유리수이면 방정식 $F'(x)=0$의 근은 유리수이다.

$a,\ b$는 실수이고 $a \le \frac{1}{4}$일 때, 삼차함수 $f(x)=(x^2+x+a)(x-b)$를 생각해보자. 이때,

$x^2+x+a=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+a=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1-4a}{4}$ 이다.

따라서 두 방정식 $f(x)=0,\ f'(x)=0$은 각각

$\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1-4a}{4}\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(b+\frac{1}{2}\right)\right\}=0,$ ...... (1)

$3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1-4a}{4}=0$ ...... (2)

이 된다. 이제

$x+\frac{1}{2}=t,\ b+\frac{1}{2}=u,\ \frac{1-4a}{4}=v^2$ ...... (3)

으로 놓으면, x에 대한 삼차방정식 (1)은 t에 대한 삼차방정식

$(t^2-v^2)(t-u)=0$ ...... (4)

이 된다.

이때, 방정식 (4)의 근 u와 $\pm v$가 유리수이면 (3)에 의해 b는 유리수가 되고 $1-4a=4v^2$이므로

x에 대한 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 $\dfrac{-1\pm 2v}{2}$, b는 유리수이다.

이때, 방정식 (4)의 좌변을 t에 대하여 미분한 후, 방정식

$3t^2-2ut-v^2=0$ ...... (5)

을 생각하면, 방정식 (5)는 (3)에 의해 방정식 (2)와 같다. t에 대한 이차방정식 (5)의 근은

$\dfrac{u\pm\sqrt{u^2+3v^2}}{3}$ ...... (6)

이다.

제시문 <마>와 <바>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. **b가 자연수일 때, 삼차함수 $g(x)=x(x-1)(x-b)$에 대하여 방정식 $g'(x)=0$의 두 근이 동시에 정수가 될 수 없음을 제시문 <마>를 이용하여 보이시오.**

3-2. **제시문 <바>에 있는 명제 ②가 참임을 증명하시오.**

또한 t에 대한 삼차방정식 (4)에서 $u=1$일 때, 제시문 <바>에 있는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 세 방정식 $f(x)=0$, $f'(x)=0$, $f''(x)=0$ 의 모든 근이 유리수가 되게 하는 4 이하의 자연수 v를 식 (6)을 이용하여 모두 찾고, 이에 대응하는 삼차함수 $f(x)=(x^2+x+a)(x-b)$ 를 각각 구하시오.

3. 출제 의도

명제, 함수, 방정식, 미분과 적분 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문제들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문제들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 함수의 증가와 감소, 이계도함수의 성질, 정적분, 주기함수, 방정식의 근 등에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문<가>, <나>	[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다. [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.

	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문항1-1	[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다. [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항1-2	[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.
제시문<다>, <라>	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항2-1	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항2-2	[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문<마>, <바>	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
문항3-1	[10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
문항3-2	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	황선욱 외	미래엔	2020	58-65, 199-201
	고등학교 수학	류희찬 외	천재교과서	2020	54-56, 60-62, 75-78

	고등학교 수학I	권오남 외	교학사	2020	80-96
	고등학교 수학I	홍성복 외	지학사	2020	81-88
	고등학교 수학II	박교식 외	동아출판	2020	62-67, 123-131
	고등학교 수학II	이준열 외	천재교육	2020	65-68, 78-81, 83-89, 121-126
	고등학교 미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2020	102-108, 140-144, 155-156
	고등학교 미적분	박교식 외	동아출판	2020	134-139

5. 문항 해설

제시문 <가>와 <나>에서는 연속인 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$와 이계도함수 $f''(x)$의 관계를 이용하여, 함수의 그래프 개형을 파악하는 과정을 소개한다. <문제 1-1>에서는 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$, 이계도함수 $f''(x)$의 관계와 <롤의 정리>를 이용할 수 있는지를 평가한다. <문제 1-2>에서는 제시문 <나>에서 소개된 정적분에 대한 한 예를 이용하여, 주어진 부등식을 보일 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>에서는 두 주기함수의 곱의 정적분을 주기함수의 성질, 치환적분법 등을 이용하여 구하는 방법을 소개한다. 제시문 <라>에서는 어떤 정적분의 계산 방법을 소개한다. <문제 2-1>에서는 주기함수가 포함된 어떤 연속함수의 정적분의 값을 제시문 <다>를 이용하여 계산할 수 있는지를 평가한다. <문제 2-2>에서는 연속함수 $f(x)$의 성질과 제시문 <라>에서 주어진 정적분의 계산 방법을 이용할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <마>와 <바>에서는 <이차방정식의 근과 계수의 관계>, 이차방정식 $F(x)=0$의 근으로부터 방정식 $F'(x)=0$의 근이 유리수가 되는 경우, 어떤 삼차함수 $f(x)$에 대하여, 방정식 $f(x)=0$, $f'(x)=0$의 모든 근이 유리수인 경우를 소개한다. <문제 3-1>에서는 <이차방정식의 근과 계수의 관계>를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. <문제 3-2>에서는 주어진 삼차함수 $f(x)$에 대하여, 제시문 <바>에 대한 이해를 바탕으로, 방정식 $f(x)=0$, $f'(x)=0$, $f''(x)=0$의 모든 근이 유리수가 되게 하는 함수 $f(x)$를 찾을 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1 1-2	① 제시문 <가>와 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다. ② 제시문 <가>와 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다. ③ <1-1>에서는 주어진 함수 $f(x)$에 대하여 <롤의 정리>를 적절히 이용하였는지를 평가한다. ④ <1-1>에서는 주어진 함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $f'(x)$, 이계도함수 $f''(x)$의 관계를 적절히 이용하였는지를 평가한다. ⑤ <1-2>에서는 문제를 해결하기 위하여, 필요한 함수를 적절히 도출하였는지를 평가한다. ⑥ <1-2>에서 주어진 부등식을 보일 수 있는지를 평가한다.	

	1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 4와 5 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	
2-1 2-2	① 제시문 <다>와 <라>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다. ② 제시문 <다>와 <라>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다. ③ <2-1>에서는 정적분 $\int_{2n}^{2(n+1)} g(x)\,h(x)\,dx$의 값을 정확히 도출하였는지를 평가한다. ④ <2-1>에서는 정적분 $\int_{0}^{1} g(x)\,dx$의 값을 정확히 도출하였는지를 평가한다. ⑤ <2-2>에서는 문제에서 주어진 함수의 조건을 풀이에 적절히 활용하는지를 평가한다. ⑥ <2-2>에서는 주어진 정적분의 값을 정확히 구할 수 있는지를 평가한다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 4와 5 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	
3-1 3-2	① 제시문 <마>와 <바>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다. ② 제시문 <마>와 <바>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다. ③ <3-1>에서는 삼차함수의 도함수를 구한 다음, 근과 계수의 관계를 알맞게 활용하였는지를 평가한다. ④ <3-1>에서는 주어진 문제를 적절히 해결할 수 있는지를 평가한다. ⑤ <3-2>에서는 명제 ②를 정확히 증명하였는지를 평가한다. ⑥ <3-2>에서는 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수를 알맞게 도출하였는지를 평가한다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 4와 5 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	

7. 예시 답안

■ 1-1

닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 $f''(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 (a,b)에서 미분 가능하다. 또한 $f(a)=f(b)=0$이므로 <롤의 정리>에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다. 그런데 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 $f'(x)$는 감소한다. 따라서 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 열린구간 (a,b)에서 오직 하나만 존재한다. 한편 열린구간 (a,b)에서 $f'(x)$는 감소하고 $f'(c)=0$이므로 함수 $f(x)$의 증감은 다음과 같다.

(i) 열린구간 (a,c)에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

(ii) 열린구간 (c,b)에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

또한 $f(a)=0$이므로 (i)에 의하여 열린구간 (a,c)에서 $f(x)>0$이고, $f(b)=0$이므로 (ii)에 의하여 열린구간 (c,b)에서 $f(x)>0$이다. 따라서 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이므로 이 구간에서 $f(x)\geq 0$이다.

■ 1-2

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여, 닫힌구간 $[a,b]$에서 두 점 $(a,f(a))$와 $(b,f(b))$를 지나는 일차함수 $h(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ 의 그래프를 생각하자.

이때, 함수 $F(x)=f(x)-h(x)$는 $F(a)=0$, $F(b)=0$을 만족시킨다.

열린구간 (a,b)에서 $F''(x)=f''(x)-h''(x)=f''(x)<0$ 이므로

명제 ①에 의하여 닫힌구간 $[a,b]$에서 $F(x)\geq 0$이다.

따라서 닫힌구간 $[a,b]$에서 $\int_a^b F(x)dx=\int_a^b\{f(x)-h(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b h(x)dx\geq 0$ 이므로

$\int_a^b h(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx$ 이다.

한편
$$\begin{aligned}\int_a^b h(x)dx&=\int_a^b\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}dx\\&=\left[\frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x^2-a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+f(a)x\right]_a^b\\&=\frac{1}{2}(b-a)\{f(a)+f(b)\}\end{aligned}$$

이고, $(b-a)\{f(a)+f(b)\}\leq 2\int_a^b f(x)\,dx$ 이다.

■ 2-1

정적분 $\int_{2n}^{2(n+1)}g(x)h(x)\,dx$ 에서 $x-2n=t$로 놓으면, $\dfrac{dx}{dt}=1$이고

$\int_{2n}^{2(n+1)}g(x)h(x)\,dx=\int_0^2 g(t+2n)h(t+2n)dt=\int_0^2 g(t)h(t)dt=A$ 이다.

이제 정적분의 성질을 이용하여 적분 구간을 나누면

$A=\int_0^2 g(x)h(x)dx=\int_0^1 x\,g(x)dx+\int_1^2(2-x)g(x)dx$ ...... (1)

이다. 이때 $\int_1^2(2-x)g(x)dx$의 값을 구하기 위해, $x-1=t$로 놓으면, $\frac{dx}{dt}=1$이고

$\int_1^2(2-x)g(x)dx=\int_0^1(1-t)g(t+1)dt=\int_0^1(1-t)g(t)dt$ 이다.

따라서 (1)에 의하여 $A=\int_0^2 g(x)h(x)dx=\int_0^1 x\,g(x)dx+\int_0^1(1-x)g(x)dx=\int_0^1 g(x)dx$ 이다.

■ 2-2

정적분 $\int_{-1}^1\frac{1}{\{f(x)\}^4+1}dx$에서 $f(x)=\frac{1}{f(-x)}$이므로

$\int_{-1}^1\frac{1}{\{f(x)\}^4+1}dx=\int_{-1}^1\frac{1}{\left\{\frac{1}{f(-x)}\right\}^4+1}dx=\int_{-1}^1\frac{\{f(-x)\}^4}{\{f(-x)\}^4+1}dx$ 이다.

$-x=t$로 놓으면, $\frac{dx}{dt}=-1$이고

$\int_{-1}^1\frac{\{f(-x)\}^4}{\{f(-x)\}^4+1}dx=-\int_1^{-1}\frac{\{f(t)\}^4}{\{f(t)\}^4+1}dt=\int_{-1}^1\frac{\{f(t)\}^4}{\{f(t)\}^4+1}dt$ 이다.

따라서 $\int_{-1}^1\frac{1}{\{f(x)\}^4+1}dx=\int_{-1}^1\frac{\{f(x)\}^4}{\{f(x)\}^4+1}dx$ ...... (2)

이고, $\int_{-1}^1\left[\frac{1}{\{f(x)\}^4+1}+\frac{\{f(x)\}^4}{\{f(x)\}^4+1}\right]dx=\int_{-1}^1\frac{\{f(x)\}^4+1}{\{f(x)\}^4+1}dx=2$ 이다.

(2)에 의하여 $\int_{-1}^1\frac{1}{\{f(x)\}^4+1}dx=1$ 이다.

■ 3-1

b가 자연수일 때, 삼차함수 $g(x)=x(x-1)(x-b)=x^3-(b+1)x^2+bx$ 에 대하여

$g'(x)=3x^2-2(b+1)x+b$ 이다.

이차방정식 $g'(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 <이차방정식의 근과 계수의 관계>에 의해

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}(b+1)$, $\alpha\beta=\frac{b}{3}$ ...... (1)

이다.

α, β가 모두 정수라 가정하면, b가 자연수이므로 (1)에 의해 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 자연수이며,

$2(b+1)=3(\alpha+\beta)$ ...... (2)

$b=3\alpha\beta$ ...... (3)

이다.

3은 2와 서로소이므로 (2)에 의해 $b+1$은 3의 배수이고, (3)에 의해 b는 3의 배수이다.

이는 모순이므로 방정식 $g'(x)=0$의 두 근이 동시에 정수가 될 수 없다.

■ 3-2

이차함수 $F(x)=a(x-r)(x-s)$에 대해 $F'(x)=a(2x-r-s)$이다.

이차방정식 $F(x)=0$의 두 근 r, s가 유리수이면, 방정식 $F'(x)=0$의 근 $\dfrac{r+s}{2}$는 유리수이다.

$u=1$일 때, **제시문 <바>**에 있는 식 (6)은 $\dfrac{1\pm\sqrt{1+3v^2}}{3}$이다.

(i) $v=1$이면 $\dfrac{1\pm\sqrt{1+3v^2}}{3}=\dfrac{1\pm 2}{3}$이므로, **제시문 <바>**에 있는 t에 대한 방정식 (5)의 두 근은 유리수가 된다.

그런데 **제시문 <바>**에 있는 (3)에서 $x=t-\dfrac{1}{2}$이므로, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 유리수가 된다.

한편, **제시문 <바>**에 있는 (3)에 의해 $1=b+\dfrac{1}{2}$, $1=\dfrac{1-4a}{4}$이므로 $a=-\dfrac{3}{4}$, $b=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $v=1$에 대응하는 $f(x)=0$, $f'(x)=0$의 모든 근이 유리수가 되게 하는 삼차함수는

$f(x)=\left(x^2+x-\dfrac{3}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 이다.

이때, 명제 ②에 의해 방정식 $f''(x)=0$의 근도 유리수이다.

(ii) $v=2$이면 $\dfrac{1\pm\sqrt{1+3v^2}}{3}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{3}$이므로, **제시문 <바>**에 있는 t에 대한 방정식 (5)의 두 근은 무리수가 된다.

그런데 **제시문 <바>**에 있는 (3)에서 $x=t-\dfrac{1}{2}$이므로, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 무리수가 된다.

따라서 $v=2$에 대응하는 $f'(x)=0$의 모든 근이 유리수가 되게 하는 삼차함수 $f(x)=(x^2+x+a)(x-b)$ 는 존재하지 않는다.

(iii) $v=3$이면 $\dfrac{1\pm\sqrt{1+3v^2}}{3}=\dfrac{1\pm 2\sqrt{7}}{3}$이므로, **제시문 <바>**에 있는 t에 대한 방정식 (5)의 두 근은 무리수가 된다.

그런데 **제시문 <바>**에 있는 (3)에서 $x=t-\dfrac{1}{2}$이므로, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 무리수가 된다.

따라서 $v=3$에 대응하는 $f'(x)=0$의 모든 근이 유리수가 되게 하는 삼차함수 $f(x)=(x^2+x+a)(x-b)$ 는 존재하지 않는다.

(iv) $v=4$이면 $\dfrac{1\pm\sqrt{1+3v^2}}{3}=\dfrac{1\pm 7}{3}$이므로, **제시문 <바>**에 있는 t에 대한 방정식 (5)의 두 근은 유리수가 된다.

그런데 **제시문 <바>**에 있는 (3)에서 $x=t-\dfrac{1}{2}$이므로, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 유리수가 된다.

한편, **제시문 <바>**에 있는 (3)에 의해 $1=b+\dfrac{1}{2}$, $16=\dfrac{1-4a}{4}$이므로 $a=-\dfrac{63}{4}$, $b=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $v=4$에 대응하는 $f(x)=0$, $f'(x)=0$의 모든 근이 유리수가 되게 하는 삼차함수는

$f(x)=\left(x^2+x-\dfrac{63}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 이다. 이때 명제 ②에 의해 방정식 $f''(x)=0$의 근도 유리수이다.