계 열 문 항

<가>

● 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 $f''(x) < 0$이면 그 구간에서 $f'(x)$는 감소한다. 이때,

1) 열린구간 (a, b)에 속하는 어떤 실수 c_1에 대하여 $f'(c_1) > 0$이면, 열린구간 (a, c_1)에서 $f'(x) > 0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, c_1)에서 증가한다.

2) 열린구간 (a, b)에 속하는 어떤 실수 c_2에 대하여 $f'(c_2) < 0$이면, 열린구간 (c_2, b)에서 $f'(x) < 0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 (c_2, b)에서 감소한다.

● <롤의 정리>

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a) = f(b)$이면 $f'(c) = 0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

<나>

① 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$을 만족시킬 때, 열린구간 (a, b)에서 $f''(x) < 0$이면, 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq 0$이다.

● 함수 $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x$에 대하여, 부등식

$$\int_0^1 h(x)\,dx \leq \int_0^1 g(x)\,dx \qquad \cdots\cdots \qquad (1)$$

가 성립함을 보이자. 함수 $F(x) = g(x) - h(x)$는 $F(0) = 0$, $F(1) = 0$이고, 열린구간 $(0, 1)$에서 $F''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$이다. 그러면 명제 ①에 의하여 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $F(x) \geq 0$이므로 이 구간에서 $h(x) \leq g(x)$이고 부등식 (1)이 성립한다.

제시문 <가>와 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 제시문 <가>를 이용하여, 제시문 <나>에 있는 명제 ①이 참임을 증명하시오.

1-2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 $f''(x) < 0$을 만족시킨다. 이때,

$$(b-a)\{f(a)+f(b)\} \leq 2\int_a^b f(x)\,dx$$

임을 보이시오.

계 열 문 항

<다>

함수 $y=f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$를 주기함수라 하고 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다.

두 주기함수의 곱의 정적분을 생각해보자. 예를 들어, 연속함수 $G(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $G(x+\pi)=G(x)$를 만족시킬 때, 임의의 자연수 n에 대하여

$$a=\int_0^{2\pi} G(x)\sin x\,dx,\quad b=\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} G(x)\sin x\,dx$$

라 하면, $a=b=0$임을 다음과 같이 보일 수 있다.

$x-2n\pi=t$로 놓으면, $\frac{dx}{dt}=1$이고

$$b=\int_0^{2\pi} G(t+2n\pi)\sin(t+2n\pi)\,dt=\int_0^{2\pi} G(t)\sin t\,dt=a$$

이다. 이제 정적분의 성질을 이용하여 적분 구간을 나누면

$$a=\int_0^{2\pi} G(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi} G(x)\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} G(x)\sin x\,dx \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

이다. 이때, $\int_{\pi}^{2\pi} G(x)\sin x\,dx$의 값을 구하기 위해, $x-\pi=u$로 놓으면 $\frac{dx}{du}=1$이고

$$\int_{\pi}^{2\pi} G(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi} G(u+\pi)\sin(u+\pi)\,du=-\int_0^{\pi} G(u)\sin u\,du$$

이다. 따라서 (1)에 의하여 $a=0$이다.

<라>

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{e^x+1}\,dx$의 값을 생각해보자.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{e^x+1}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx=-\left[\ln(1+e^{-x})\right]_{-1}^{1}=-\ln\frac{1+e^{-1}}{1+e}=1$$

이다. 한편,

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{e^x+1}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

이다.

제시문 <다>와 <라>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 연속함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$를 만족시키고, 연속함수 $h(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $h(x+2)=h(x)$를 만족시키고

$$h(x)=\begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 2-x & (1 \le x < 2) \end{cases}$$

이다. 정적분 $\int_0^2 g(x)h(x)\,dx$의 값을 A라 할 때, 임의의 자연수 n에 대하여 정적분

$$\int_{2n}^{2(n+1)} g(x)h(x)\,dx, \quad \int_0^1 g(x)\,dx$$

의 값을 각각 구하시오.

2-2. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고 $f(x)f(-x)=1$을 만족시킬 때, 정적분

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\{f(x)\}^4+1}\,dx$$

의 값을 구하시오.

계 열 문 항

<마>

● <이차방정식의 근과 계수의 관계>

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이다.

<바>

② $\boxed{\text{이차방정식 } F(x)=0\text{의 두 근이 유리수이면 방정식 } F'(x)=0\text{의 근은 유리수이다.}}$

a, b는 실수이고 $a \le \frac{1}{4}$일 때, 삼차함수 $f(x)=(x^2+x+a)(x-b)$를 생각해보자. 이때,

$$x^2+x+a=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+a=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1-4a}{4}$$

이다. 따라서 두 방정식 $f(x)=0$, $f'(x)=0$은 각각

$$\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1-4a}{4}\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(b+\frac{1}{2}\right)\right\}=0,\quad \cdots\cdots \quad (1)$$

$$3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1-4a}{4}=0\quad \cdots\cdots \quad (2)$$

이 된다. 이제

$$x+\frac{1}{2}=t,\ b+\frac{1}{2}=u,\ \frac{1-4a}{4}=v^2\quad \cdots\cdots \quad (3)$$

으로 놓으면, x에 대한 삼차방정식 (1)은 t에 대한 삼차방정식

$$(t^2-v^2)(t-u)=0\quad \cdots\cdots \quad (4)$$

이 된다. 이때, 방정식 (4)의 근 u와 $\pm v$가 유리수이면 (3)에 의해 b는 유리수가 되고 $1-4a=4v^2$이므로 x에 대한 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 $\frac{-1\pm 2v}{2}$, b는 유리수이다. 이때, 방정식 (4)의 좌변을 t에 대하여 미분한 후, 방정식

$$3t^2-2ut-v^2=0\quad \cdots\cdots \quad (5)$$

을 생각하면, 방정식 (5)는 (3)에 의해 방정식 (2)와 같다. t에 대한 이차방정식 (5)의 근은

$$\frac{u\pm\sqrt{u^2+3v^2}}{3}\quad \cdots\cdots \quad (6)$$

이다.

제시문 <마>와 <바>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. b가 자연수일 때, 삼차함수 $g(x)=x(x-1)(x-b)$에 대하여 방정식 $g'(x)=0$의 두 근이 동시에 정수가 될 수 없음을 제시문 <마>를 이용하여 보이시오.

3-2. 제시문 <바>에 있는 명제 ②가 참임을 증명하시오. 또한 t에 대한 삼차방정식 (4)에서 $u=1$일 때, 제시문 <바>에 있는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 세 방정식

$$f(x)=0,\quad f'(x)=0,\quad f''(x)=0$$

의 모든 근이 유리수가 되게 하는 4 이하의 자연수 v를 식 (6)을 이용하여 모두 찾고, 이에 대응하는 삼차함수

$$f(x)=(x^2+x+a)(x-b)$$

를 각각 구하시오.