

<수리계열(수학)>

[숙명여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	2022학년도 자연계열 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	명제, 적분, 수열, 삼각함수의 활용, 확률
예상 소요 시간	90분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

계열 문항

<가> 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a,b]$ 에서 연속이고  $f(x) \geq 0$ 일 때, 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a$ ,  $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를  $S$ 라 하자. 닫힌구간  $[a,b]$ 를  $n$ 등분하여 양 끝점과 각 분점의  $x$ 좌표를 차례대로

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

라 하고, 각 소구간의 길이를  $\Delta x$ 라 하면,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

이다. 이때 색칠한 직사각형의 넓이의 합  $S_n$ 은

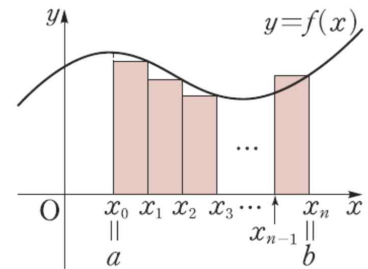
$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

이다. 여기서  $n$ 이 한없이 커질 때  $S_n$ 이  $S$ 로 수렴함이 알려져 있다. 그런데 정적분의 정의에

의하여  $S = \int_a^b f(x)dx$ 이다. 따라서, 정적분과 급수의 합 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x \quad \left( \text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x \right)$$



제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하십시오.

1-1. 급수의 합 표현을 이용하여 정적분  $\int_0^1 x^3 dx$ 의 값을 구하십시오.

1-2. 아래 식을 급수의 합 표현으로 바꾸고, 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 그 값을 구하십시오.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \ln \left( \frac{2^N + 1}{2^N} \right)^{\frac{1}{2^N}} + \ln \left( \frac{2^N + 2}{2^N} \right)^{\frac{1}{2^N}} + \dots + \ln \left( \frac{2^N + 2^N}{2^N} \right)^{\frac{1}{2^N}} \right\}$$

### 계열문항

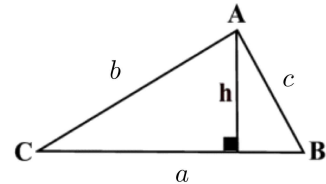
<나> 삼각형 ABC에서  $\angle A, \angle B, \angle C$ 의 크기를 각각  $A, B, C$ 라 하고 이들의 대변의 길이를 각각  $a, b, c$ 라 하자. 삼각형 ABC의 넓이는 밑변이  $a$ , 높이가  $h$ 일 때

$\frac{1}{2}ah$ 이다. 삼각함수를 이용하여 높이  $h$ 를  $b$ 와  $\sin C$ 로

나타내면  $h = b \sin C$  이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab \sin C \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

이다.



한편  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  과 코사인법칙을 이용하여  $\sin C$ 를  $a, b, c$ 로 나타내면 삼각형의 넓이는

$$\sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서  $s = \frac{a+b+c}{2}$ 라 두면 위 식은

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

이다. 삼각형의 넓이를 구하는 이 식을 ‘헤론의 공식’이라 한다.

<다>  $n$ 이 자연수일 때  $n$ 개의 양수  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 에 대하여 이들의

산술평균  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 과 기하평균  $(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$ 은 부등식

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

을 만족시키고 등호는  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 일 때 성립한다.

<라> 둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 최대인 직사각형은 정사각형임을 미분을 사용하지 않고 다음과 같이 보일 수 있다.

주어진 직사각형의 둘레의 길이를  $L$ 이라 하고 한 변의 길이를  $x$ 라 하면 다른 한 변의 길이는  $\frac{L-2x}{2}$ 이다. 이 직사각형의 넓이를  $A(x)$ 라 하면

$$A(x) = x \left( \frac{L-2x}{2} \right) = \frac{1}{2}Lx - x^2 = \frac{L^2}{16} - \left( x - \frac{L}{4} \right)^2$$

여기서  $\left( x - \frac{L}{4} \right)^2 \geq 0$  이므로  $A(x) = \frac{L^2}{16} - \left( x - \frac{L}{4} \right)^2 \leq \frac{L^2}{16}$ 이다.

사각형의 넓이는  $\frac{L^2}{16}$ 보다 클 수 없고  $A(x) = \frac{L^2}{16}$ 이기 위한 필요충분조건은  $x = \frac{L}{4}$ 이다.

따라서 둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 최대인 사각형은 정사각형이다.

2-1. 제시문 <나>에서 식 ①로부터 식 ②를 유도하는 과정을 서술하시오.

2-2. 제시문 <나>-<라>를 이용하여 둘레의 길이가 일정한 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형은 어떤 삼각형인지를, 구하는 과정과 함께 설명하시오.

## 계 열 문 항

<마> 등비수열은 이전 항에 차례로 일정한 값을 곱하여 만들어진 수열을 말하며 이때 곱해지는 일정한 값을 공비라고 한다. 첫째항이  $a$  ( $a \neq 0$ )이고 공비가  $r$ 인 등비수열,  $a_n = ar^{n-1}$ 에 대해 무한등비급수를  $S$ 라고 하면

$$S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = a \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

이다. 이 때  $|r| < 1$ 이면, 급수  $S$ 는  $\frac{a}{1-r}$ 로 수렴하고  $|r| \geq 1$ 이면 급수  $S$ 는 발산한다.

<바> 옷 하나를 던지는 시행을 할 때 나오는 결과는 떨어지는 경우( $T$ )와 젖혀지는 경우( $H$ )밖에 없으며 옷이 떨어질 확률은  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 젖혀질 확률은  $q = 1 - p$ 라 하자. 떨어지는 경우가 나올 때까지 옷을 반복적으로 던진다고 할 때, 처음으로 떨어진 옷이 나올 때까지 옷을 던진 횟수가  $n$ 인 확률을  $f_n$ 이라 하자. 예를 들어, 옷을 던져 세 번째에 처음으로 떨어진 옷이 나올 확률은  $P(HHT) = pq^2$ 이다. 따라서,  $f_n$ 은 다음과 같이 첫째항이  $p$ 이고 공비가  $q$ 인 등비수열로 표시할 수 있다.

$$f_n = pq^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

제시문 <마>, <바>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1.  $n$ 이 홀수이면 1, 짝수이면  $-1$ 이 되는 등비수열  $\{a_n\}$ 을 구하고 이를 이용하여  $n$ 이 홀수이면 0, 짝수이면 1이 되는 수열  $\{b_n\}$ 을 구하시오.

3-2. 제시문 <바>의  $f_n$ 을 이용하여, 짝수번 던졌을 때 처음으로 얻어진 윷이 나올 확률이  $\frac{1}{2}$ 보다 작음을 보이시오.

### 3. 출제 의도

함수, 미분과 적분, 방정식과 부등식, 삼각함수와 그 활용, 명제, 확률과 통계 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 적분, 삼각함수의 활용과 부등식의 증명, 수열로 나타내어진 확률에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

### 4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문

관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 1	교육과정*	<b>[미적분] - III 적분법 - 3 정적분의 활용</b> ① 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
	성취기준· 성취수준**	<b>[미적분] - III 적분법 - 3 정적분의 활용</b> ① 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
문제 1-1	교육과정	<b>[미적분] - III 적분법 - 3 정적분의 활용</b> ① 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. <b>[미적분] - I 수열의 극한 - 1 수열의 극한</b> ② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	<b>[미적분] - III 적분법 - 3 정적분의 활용</b> ① 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. <b>[미적분] - I 수열의 극한 - 1 수열의 극한</b> ② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문제 1-2	교육과정	<b>[미적분] - III 적분법 - 1 여러 가지 적분법</b> ③ 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. <b>[미적분] - III 적분법 - 3 정적분의 활용</b> ① 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
	성취 기준· 성취수준	<b>[미적분] - III 적분법 - 1 여러 가지 적분법</b> ③ 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. <b>[미적분] - III 적분법 - 3 정적분의 활용</b> ① 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
제시문 2	교육과정*	<b>[수학] - VI 집합과 명제 - ㉒ 명제 - 4. 절대부등식</b> ① 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. <b>[수학 I] - II 삼각함수 - 2 삼각함수의 활용</b> ① 삼각함수를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준**	<b>[수학] - VI 집합과 명제 - ㉒ 명제 - 4. 절대부등식</b> <b>[수학 I] - II 삼각함수 - 2 삼각함수의 활용</b>
문제 2-1	교육과정	<b>[수학 I] - II 삼각함수 - 2 삼각함수의 활용</b> ① 사인법칙과 코사인 법칙을 이해하고 이를 활용할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	<b>[수학 I] - II 삼각함수 - 2 삼각함수의 활용</b> ① 사인법칙과 코사인 법칙을 이해하고 이를 활용할 수 있다.
문제 2-2	교육과정	<b>[수학] - VI 집합과 명제 - ㉒ 명제 - 4. 절대부등식</b> ① 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. <b>[수학 I] - II 삼각함수 - 2 삼각함수의 활용</b> ① 삼각함수를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취 기준· 성취수준	<b>[수학] - VI 집합과 명제 - ㉒ 명제 - 4. 절대부등식</b> ① 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. <b>[수학 I] - II 삼각함수 - 2 삼각함수의 활용</b> ① 삼각함수를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.
제시문 3	교육과정*	<b>[미적분] - I 수열의 극한 - ㉒ 급수 - 2 등비급수</b> ① 등비급수의 수렴 조건과 극한값을 계산할 수 있다. <b>[확률과 통계] - II 확률 - ㉒ 조건부 확률 2 사건의 독립과 종속</b>

문항 및 제시문		관련 성취기준
	성취기준· 성취수준**	① 독립인 사건의 확률이 확률의 곱으로 표시된다는 것을 활용할 수 있다. [미적분] - I 수열의 극한 - 2 급수 [확률과 통계] - II 확률 - ㉠ 조건부 확률 2 사건의 독립과 종속 ① 제시된 확률의 형태가 등비수열의 형태로 표시되고 있음을 활용할 수 있다.
	교육과정	[미적분] - I 수열의 극한 - ㉠ 수열의 극한 - 3 등비수열의 극한 ① 등비수열의 정의를 활용할 수 있다.
문제 3-1	성취기준· 성취수준	[미적분] - I 수열의 극한 - ㉠ 수열의 극한 - 3 등비수열의 극한 ① 등비수열을 만들고 이를 활용한 수열을 구성해 본다
	교육과정	[미적분] - I 수열의 극한 - ㉠ 급수 - 2 등비급수 ① 등비급수의 극한값을 활용할 수 있다. [수학 II] - II 미분 - ㉠ 도함수의 활용-3 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 ① 관련식의 도함수를 이용하여 극소값을 구할 수 있다.
문제 3-2	성취기준· 성취수준	[미적분] - I 수열의 극한 - ㉠ 급수 - 2 등비급수 ① 등비급수의 부분 합의 극한값을 계산할 수 있다. [수학 II] - II 미분 - ㉠ 도함수의 활용-3 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 ① 극한값의 도함수를 이용하여 극소값을 구할 수 있다.
	교육과정	[미적분] - I 수열의 극한 - ㉠ 급수 - 2 등비급수 ① 등비급수의 부분 합의 극한값을 계산할 수 있다. [수학 II] - II 미분 - ㉠ 도함수의 활용-3 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 ① 극한값의 도함수를 이용하여 극소값을 구할 수 있다.

\*: 교육과학기술부 고시 제 2011-361호[별책 8] “수학과 교육과정”의 일반과목

\*\*: 교육과학기술부 발간 「2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준 : 고등학교 수학」 (발간물 등록번호 : 11-1341000-002322-01)의 일반과목

나) 자료 출처(관련 교과서는 최소 2종 이상 제시)

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선옥 외	미래엔	2017	204-205
	수학	고성은 외	좋은책신사고	2017	195-196
	수학 I	이준열 외	천재교육	2017	98-108
	수학 I	고성은 외	좋은책신사고	2017	92-100
	수학 II	김원경 외	비상교육	2020	78-85
	수학 II	권오남 외	교학사	2020	88-95
	미적분	황선옥 외	미래엔	2019	11-26, 127-173
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	11-29, 137-185
	미적분	김원경 외	비상교육	2020	32-33
	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2020	57-58
	확률과 통계	황선옥 외	미래엔	2020	63-66
기타					

1) 교과서 외 자료를 활용한 경우, 관련 자료별로 교과서 근거를 작성.

## 5. 문항 해설

제시문 (가)에서는 닫힌구간에서 연속인 함수의 정적분이 급수의 합으로 표현될 수 있음을 설명한다. 이를 바탕으로 문제 1-1에서는 정적분의 계산을 부정적분 없이 급수의 합으로 계산할 수 있는지를 평가한다. 한편 1-2에서는 주어진 극한을 급수의 합 표현으로 나타낸 뒤, 정적분을 활용하여 급수의 합의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

제시문 (나)에서는 삼각형의 넓이를 밑변과 높이로 나타낸 식으로부터 삼각함수를 이용하여 삼각형의 넓이를 세 변의 길이로 나타내는 과정을 서술하고, 결과로 나타내어진 헤론의 공식을 소개한다. 제시문 (다)에서는 산술평균과 기하평균의 관계를 나타내는 부등식을 소개한다. 제시문 (라)에서는 직사각형의 네 변의 길이의 합이 일정할 때 넓이가 최대인 사각형은 정사각형임을 대수적인 방법으로 보이는 과정을 서술하였다.

문제 2-1은 코사인 법칙을 사용하여 헤론의 공식을 유도할 수 있는지를 평가한다.

문제 2-2는 제시문 (라)의 과정을 이해하여 세 변의 길이의 합이 일정한 값으로 주어졌을 때 넓이가 최대인 삼각형이 어떤 삼각형인지 밝힐 수 있는지를 평가한다.

제시문 (마)에서는 등비수열과 급수에 대한 정의 및 정리를 기술하였으며 바)에서는 확률실험의 표본공간 원소들이 등비수열의 형태로 표시되는 상황을 기술하고 있다.

문제 3-1은 주어진 조건을 만족하는 수열을 만들 수 있는지를 평가한다.

문제 3-2는 주어진 시행의 확률을  $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}$  로 나타낼 수 있다는 것과 이 급수의 값이

$\frac{1}{2}$ 보다 작음을 보일 수 있는지 평가한다.

## 6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$\Delta x = \frac{1}{n}, x_k = \frac{k}{n}, f(x_k) = x_k^3 = \left(\frac{k}{n}\right)^3$ 으로 표현될 수 있음을 안다.	4
	주어진 정적분을 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3$ 꼴로 변환한다.	3
	위 극한값이 $\frac{1}{4}$ 임을 보인다.	3
1-2	주어진 극한을 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^N} \frac{1}{2^N} \ln\left(1 + \frac{k}{2^N}\right)$ 꼴로 서술할 수 있음을 안다.	3
	정적분과 급수의 합 관계를 이용하여 주어진 식을 $\int_1^2 (\ln x) dx$ 로 나타낸다.	4
	주어진 정적분의 값이 $2\ln 2 - 1$ 임을 보인다.	3
2-1	① 코사인법칙을 사용하여 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 이므로 $\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2}$ 임을 보인다	5
	② 근호안의 식을 정리하여 $\frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 임을 보인다.	5
2-2	제시문 <다>의 산술-기하평균 부등식에서 $n = 3$ 인 경우를 사용한다.	3
	$(s-a), (s-b), (s-c)$ 가 모두 양수임을 보인다.	3
	산술-기하평균 부등식을 이용하여 삼각형의 넓이가 최댓값을 갖는 것은 $(s-a) = (s-b) = (s-c)$ 일 때, 즉 세 변의 길이가 모두 같은 정삼각형일 때임을 설명한다.	4
3-1	① 홀수이면 1 짝수이면 -1이 되기 위해서는 공비가 -1이 되어야 하며 첫째항은 1이어야 하기 때문에 $a_n = ar^{n-1} = 1(-1)^{n-1}$ 가 됨을 보인다.	2
	② 홀수이면 0, 짝수이면 1이 되는 수열의 경우 앞의 $a_n$ 을 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있음을 보인다. $b_n = \frac{1 - a_n}{2} = \frac{1 - (-1)^{n-1}}{2}$	3
3-2	$n$ 인 짝수인 수열의 합이 $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}$ 로 나타낼 수 있음을 보인다.	4
	무한등비급수 식을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}$ 를 계산한다.	6

(문항 당)

등급	1등급	2등급	3등급	4등급	5등급	6등급	7등급	8등급	9등급
취득점수	18	16	14	12	10	8	6	4	2

## 7. 예시 답안

1-1.

$f(x) = x^3$ 이라 하면 함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[0,1]$ 에서 연속이다.

이때  $a = 0$ ,  $b = 1$ 이므로

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad x_k = a + k\Delta x = \frac{k}{n},$$

$$f(x_k) = x_k^3 = \left(\frac{k}{n}\right)^3$$

이므로, 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k^3}{n^3} \times \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \times \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4n^4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

이다.

1-2. 주어진 식을 급수의 합 표현으로 바꾸면

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \ln \left( \frac{2^N + 1}{2^N} \right)^{\frac{1}{2^N}} + \ln \left( \frac{2^N + 2}{2^N} \right)^{\frac{1}{2^N}} + \dots + \ln \left( \frac{2^N + 2^N}{2^N} \right)^{\frac{1}{2^N}} \right\} \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^N} \ln \left( \frac{2^N + k}{2^N} \right)^{\frac{1}{2^N}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^N} \frac{1}{2^N} \ln \left( \frac{2^N + k}{2^N} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^N} \frac{1}{2^N} \ln \left( 1 + \frac{k}{2^N} \right)$$

이다. 이때,  $f(x) = \ln(x)$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $n = 2^N$ 으로 놓으면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2^N}, \quad x_k = a + k\Delta x = 1 + \frac{k}{2^N}$$

이다. 따라서 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^N} \frac{1}{2^N} \ln \left( 1 + \frac{k}{2^N} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \\ &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (\ln x) dx \\ &= [x \ln x - x]_1^2 = (2 \ln 2 - 2) - (0 - 1) = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

이다.

2-1. 삼각형 ABC의 넓이를  $A$ 라 하면  $A = \frac{1}{2} ab \sin C$ 이다.

$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ 이므로  $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$  이고

코사인법칙  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$  에서

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ 이므로 } \sin C = \sqrt{1 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \sqrt{1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}} = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\{2ab + (a^2 + b^2 - c^2)\} \{2ab - (a^2 + b^2 - c^2)\}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\{(a+b)^2 - c^2\} \{c^2 - (a-b)^2\}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \end{aligned}$$

여기서  $s = \frac{a+b+c}{2}$ 라 두면

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{1}{16} (a+b+c)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

2-2. 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각  $a, b, c$ 라 하고  $s = \frac{a+b+c}{2}$ 라 하자.

삼각형의 넓이를  $A$  라 하면 헤론의 공식에 의해

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

이다.

따라서 삼각형의 넓이가 최대인 경우는  $(s-a)(s-b)(s-c)$ 가 최대인 경우이다.

제시문 (나)에서  $n=3$ 인 경우를 생각하면  $(s-a), (s-b), (s-c)$ 가 모두 양수일 때 부등식 ②가 성립한다.

$$s-a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{-a+b+c}{2}, \quad s-b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a-b+c}{2}$$

$$s-c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} \text{ 이고}$$

$a, b, c$ 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

따라서  $(s-a), (s-b), (s-c)$ 는 모두 양수이고

$$\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} = \frac{3s-(a+b+c)}{3} = \frac{s}{3} \geq \{(s-a)(s-b)(s-c)\}^{1/3}$$

이 성립한다.

즉  $(s-a)(s-b)(s-c)$ 의 값은  $\frac{s}{3}$ 보다 클 수 없고  $(s-a)(s-b)(s-c)$ 가 최댓값을 갖는 것은

$(s-a)=(s-b)=(s-c)$ 일 때이다.

즉 삼각형의 넓이가 최대인 경우는 삼각형  $ABC$ 가  $a=b=c$ 인 정삼각형일 때이다.

### 3-1

- 홀수이면 1 짝수이면 -1이 되기 위해서는 공비가 -1이 되어야 하며 첫째항은 1이어야 하기 때문에  $a_n = ar^{n-1} = 1(-1)^{n-1}$ 가 된다.
- 홀수이면 0, 짝수이면 1이 되는 수열의 경우 앞의  $a_n$ 을 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$b_n = \frac{1-a_n}{2} = \frac{1-(-1)^{n-1}}{2}$$

### 3-2.

$n$ 인 짝수인 수열의 합은  $f_2 + f_4 + f_6 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}$ 이며

- 풀이1)  $b_n$ 을 이용하는 경우: 2-1의  $b_n$ 을 이용하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^{n-1}}{2} pq^{n-1} = \frac{p}{2} \left( \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} - \sum_{x=1}^{\infty} (-q)^{x-1} \right)$$

여기서 괄호 안에 있는 두 합은 각각 첫째항이 1이고 공비가  $q$ 와  $-q$ 인 등비급수이고  $|q|=|1-p|<1$ 이므로 제시문 가)의 공식에 의해 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$= \frac{p}{2} \left( \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1+q} \right) = \frac{p}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2-p} \right) = \frac{1}{2} - \frac{p}{2(2-p)}$$

$0 < p < 1$ 이므로 위의 식에서  $p/(2(2-p)) > 0$ 이므로  $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} < \frac{1}{2}$

- 풀이 2)  $b_n$ 을 이용하지 않는 경우 :  $f_{2n} = pq^{2n-1}$ 을  $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}$ 에 대입하면

풀어 쓰면

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = pq + pq^3 + pq^5 + \dots$$

가 되는데 이는 첫째항이  $pq$ 이고 공비가  $q^2$ 인 등비급수이고  $|q^2| < 1$ 이므로 다음과 같은 결과를 유도할 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}$$

여기서  $f(q) = \frac{q}{1+q}$ 가  $1/2$ 보다 작다는 것을 보이기 위해 다음과 같이 두 가지 방법을 적용할 수 있다.

방법1:  $\frac{df(q)}{dq} = \frac{1}{(1+q)^2} > 0$ 이므로  $f(q) = \frac{q}{1+q}$ 는  $q$ 에 단조증가함수라는

것을 의미하며  $q=1-p$ 는  $0 < q < 1$ 이므로  $f(q) < f(1) = \frac{1}{2}$ 가 된다.

방법2:  $q < 1$ 로부터  $1+q > 2q$  이고,  $q > 0$ 이므로  $\frac{1}{1+q} < \frac{1}{2q}$ 이다. 양변에  $q$ 를

곱하면  $\frac{q}{1+q} < \frac{q}{2q} = \frac{1}{2}$ 이다.