2023학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수 답안
- 자 연 계 열 문 항 -

■1-1.

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\times\frac{1}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^3}{n^3}\times\frac{1}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

■1-2.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2^n}\left(\ln(1+\frac{1}{2^n})+\ln(1+\frac{2}{2^n})+\cdots+\ln(1+\frac{2^n}{2^n})\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n}\ln\left(1+\frac{k}{2^n}\right)$$

$$=\int_0^1 \ln(1+x)dx = \int_1^2 \ln x\, dx$$
$$= [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$$

■2-1.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

제2코사인법칙 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$$
$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

식 ① $\frac{1}{2}ab\sin C$ 로부터 식 ② $\sqrt{s(a-b)(b-c)(c-a)}$ 를 유도하면

△ABC의 넓이 $= \frac{1}{2}ab\sin C$

$$= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C}$$

$$= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{4a^2b^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\{(a+b)^2-c^2)\}\{c^2-(a-b)^2\}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}$$

$$= \sqrt{(\frac{a+b+c}{2})(\frac{a+b-c}{2})(\frac{c+a-b}{2})(\frac{c-a+b}{2})}$$

$$= \sqrt{(\frac{a+b+c}{2})(\frac{a+b+c-2c}{2})(\frac{c+a+b-2b}{2})(\frac{c+a+b-2a}{2})}$$

$$= \sqrt{(\frac{a+b+c}{2})(\frac{a+b+c}{2}-c)(\frac{c+a+b}{2}-b)(\frac{c+a+b}{2}-a)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

■2-2.

둘레의 길이가 일정한 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형을 구하기 위해 삼각형의 세 변을 a+b, b+c, c+a 로 둔다. (a > 0, b > 0, c > 0)

삼각형 면적을 A라 하면 삼각형의 넓이는 헤론 공식에 의해

$A = \sqrt{(a+b+c)abc}$

산술 기하 평균 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$(등호는 a=b=c일 때)

따라서 정삼각형일 경우 면적이 가장 넓다.

■3-1.

$a_n = ar^{n-1}$ (n은 자연수)

$a_{2n-1} = ar^{2n-2} = 1 \quad a_{2n} = ar^{2n-1} = -1$

$r = -1 \quad a = 1$ 이므로

$a_n = (-1)^{n-1} \quad b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a_{n+1}$

$b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n$

$= \frac{1+(-1)^n}{2}$

$\therefore\ a_n = (-1)^{n-1} \quad b_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$

■3-2.

(짝수번 던졌을 때 처음으로 엎어진 윷이 나올 확률)

$= pq^1 + pq^3 + pq^5 + pq^7 \cdots$

$= \frac{pq}{1-q^2}$ (0 < q < 1 이므로)

$= \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{p-p^2}{1-1+2p-p^2}$

$= \frac{p-p^2}{2p-p^2} = \frac{1-p}{2-p}$

$= \frac{p-1}{p-2} = 1 + \frac{1}{p-2}$

$f(p) = 1 + \frac{1}{p-2}$ 라고 하면

$f(p) = -\frac{1}{(p-2)^2}$ 0< p < 1 이므로

$f(p) = -\frac{1}{(p-2)^2} < 0$ 이므로

$f(p)$는 감소함수이다.

그러므로 $f(p)$ 는 $f(0)$ 보다 작다.

$f(p) < f(0)$

$f(p) < \frac{1}{2}$

그러므로 $1 + \frac{1}{p-2} < \frac{1}{2}$ 이기 때문에 짝수번 던졌을 때 처음으로 엎어진 윷이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$보다 작다.