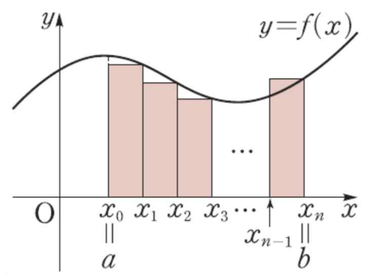
계 열 문 항

〈가〉 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하자. 닫힌구간 $[a,b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례대로

$$a=x_0,\ x_1, x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라 하면,

$$\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\ (k=0,1,\cdots,n)$$



이다. 이때 색칠한 직사각형의 넓이의 합 S_n은

$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ \cdots\ +f(x_n)\Delta x$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

이다. 여기서 n이 한없이 커질 때 S_n이 S로 수렴함이 알려져 있다. 그런데 정적분의 정의에 의하여 $S=\int_a^b f(x)dx$이다. 따라서, 정적분과 급수의 합 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad \left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

제시문 〈가〉를 읽고 다음 문제에 답하시오.

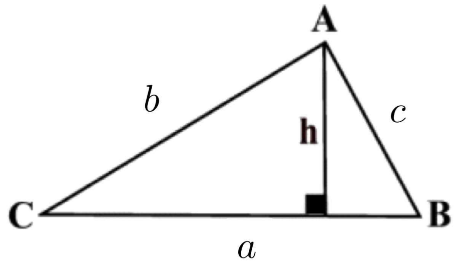
1-1. 급수의 합 표현을 이용하여 정적분 $\int_0^1 x^3 dx$의 값을 구하시오.

1-2. 아래 식을 급수의 합 표현으로 바꾸고, 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 그 값을 구하시오.

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\ln\left(\frac{2^N+1}{2^N}\right)^{\frac{1}{2^N}}+\ln\left(\frac{2^N+2}{2^N}\right)^{\frac{1}{2^N}}+\ \cdots\ +\ln\left(\frac{2^N+2^N}{2^N}\right)^{\frac{1}{2^N}}\right\}$$

계 열 문 항

〈나〉 삼각형 ABC에서 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 각각 A, B, C라 하고 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 하자. 삼각형 ABC의 넓이는 밑변이 a, 높이가 h일 때 $\frac{1}{2}ah$이다. 삼각함수를 이용하여 높이 h를 b와 $\sin C$로 나타내면 $h = b\sin C$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는



$$\frac{1}{2}ab\sin C \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

이다.

한편 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 과 코사인법칙을 이용하여 $\sin C$를 a, b, c로 나타내면 삼각형의 넓이는

$$\sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 $s = \frac{a+b+c}{2}$라 두면 위 식은

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

이다. 삼각형의 넓이를 구하는 이 식을 '헤론의 공식'이라 한다.

〈다〉 n이 자연수일 때 n개의 양수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여 이들의 산술평균 $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$과 기하평균 $\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}}$은 부등식

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

을 만족시키고 등호는 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$일 때 성립한다.

〈라〉 둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 최대인 직사각형은 정사각형임을 미분을 사용하지 않고 다음과 같이 보일 수 있다.

주어진 직사각형의 둘레의 길이를 L이라 하고 한 변의 길이를 x라 하면 다른 한 변의 길이는 $\frac{L-2x}{2}$이다. 이 직사각형의 넓이를 $A(x)$라 하면

$$A(x) = x\left(\frac{L-2x}{2}\right) = \frac{1}{2}Lx - x^2 = \frac{L^2}{16} - \left(x - \frac{L}{4}\right)^2$$

여기서 $\left(x - \frac{L}{4}\right)^2 \geq 0$이므로 $A(x) = \frac{L^2}{16} - \left(x - \frac{L}{4}\right)^2 \leq \frac{L^2}{16}$이다.

사각형의 넓이는 $\frac{L^2}{16}$보다 클 수 없고 $A(x) = \frac{L^2}{16}$이기 위한 필요충분조건은 $x = \frac{L}{4}$이다.

따라서 둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 최대인 사각형은 정사각형이다.

제시문 〈나〉-〈라〉를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 제시문 〈나〉에서 식 ①로부터 식 ②를 유도하는 과정을 서술하시오.

2-2. 제시문 〈나〉-〈라〉를 이용하여 둘레의 길이가 일정한 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형은 어떤 삼각형인지를, 구하는 과정과 함께 설명하시오.

계 열 문 항

〈마〉 등비수열은 이전 항에 차례로 일정한 값을 곱하여 만들어진 수열을 말하며 이때 곱해지는 일정한 값을 공비라고 한다. 첫째항이 $a(\neq 0)$이고 공비가 r인 등비수열, $a_n = ar^{n-1}$에 대해 무한등비급수를 S라고 하면

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = a\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

이다. 이 때 $|r| < 1$이면, 급수 S는 $\dfrac{a}{1-r}$로 수렴하고 $|r| \geq 1$이면 급수 S는 발산한다.

〈바〉 윷 하나를 던지는 시행을 할 때 나오는 결과는 엎어지는 경우(T)와 젖혀지는 경우(H)밖에 없으며 윷이 엎어질 확률은 p $(0 < p < 1)$, 젖혀질 확률은 $q = 1-p$라 하자. 엎어지는 경우가 나올 때까지 윷을 반복적으로 던진다고 할 때, 처음으로 엎어진 윷이 나올 때까지 윷을 던진 횟수가 n인 확률을 f_n이라 하자. 예를 들어, 윷을 던져 세 번째에 처음으로 엎어진 윷이 나올 확률은 $P(HHT) = pq^2$이다. 따라서, f_n은 다음과 같이 첫째항이 p이고 공비가 q인 등비수열로 표시할 수 있다.

$$f_n = pq^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

제시문 〈마〉, 〈바〉를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. n이 홀수이면 1, 짝수이면 -1이 되는 등비수열 $\{a_n\}$을 구하고 이를 이용하여 n이 홀수이면 0, 짝수이면 1이 되는 수열 $\{b_n\}$을 구하시오.

3-2. 제시문 〈바〉의 f_n을 이용하여, 짝수번 던졌을 때 처음으로 엎어진 윷이 나올 확률이 $\dfrac{1}{2}$보다 작음을 보이시오.