계 열 문 항

<가>

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 함수 $f(x)g(x)$를 x에 대하여 미분하면

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이다.

구간 $[a, b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수가 연속이면

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

이다.

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$는 미분가능하고

$$f(x+1) = (x+1)f(x), \quad f(1) = 1$$

을 만족시킨다. $f'(4) - 9f'(2) - 6f'(1)$의 값을 구하시오.

1-2. 함수 $f(u)$는

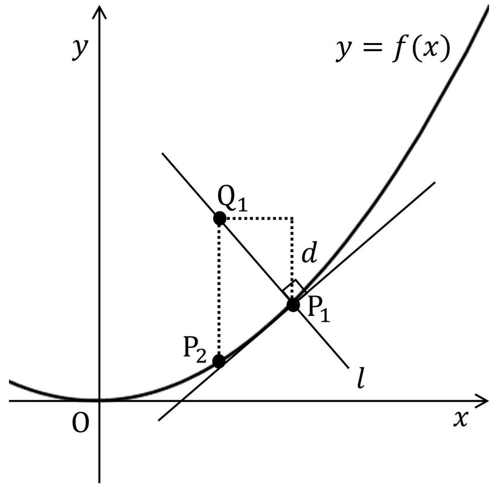
$$f(u) = \int_0^1 x^u (1-x)^{10} dx, \quad u \geq 1$$

이다. $u \geq 2$일 때, $f(u) = g(u)f(u-1)$인 $g(u)$를 구하고 $f(u+1) = \frac{1}{12}f(u-1)$인 u의 값을 구하시오.

계 열 문 항

<나>

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$에 대하여 점 P_1을 지나고 점 P_1에서의 접선과 수직인 직선을 l이라 하자. 양수 d에 대하여 직선 $y=y_1+d$와 직선 l의 교점을 Q_1이라 하고, 점 Q_1을 지나고 y축과 평행한 직선과 $y=f(x)$의 그래프의 교점을 점 $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$라 하자. 같은 방법으로 점 P_2를 지나고 점 P_2에서의 접선과 수직인 직선이 직선 $y=y_2+d$와 만나는 점을 Q_2라 하고, 점 Q_2를 지나고 y축과 평행한 직선과 $y=f(x)$의 그래프의 교점을 점 $\mathrm{P}_3(x_3, y_3)$이라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 n번째 얻은 점을 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$이라 하자.



점 P_n의 x좌표로 이루어진 수열 $\{x_n\}$의 수렴과 발산은 d의 값에 따라 달라지고, 수렴하는 경우 수열 $\{x_n\}$의 극한값은 함수 $y=f(x)$가 극소가 되는 x의 값이다.

<다>

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산을 조사해보자.

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = pa_n + q \quad (\text{단, } p,\ q\text{는 상수이고 } n=1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots ①$$

이 수열이 수렴하는 경우 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$이므로 식 ①에서

$$\alpha = p\alpha + q \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. 이때 수열 $\{a_n\}$이 α로 수렴하는 것은 수열 $\{a_n-\alpha\}$가 0으로 수렴하는 것과 같다. 식 ①에서 식 ②를 빼면 $a_{n+1}-\alpha = p(a_n-\alpha)$이므로 수열 $\{a_n-\alpha\}$는 공비가 p인 등비수열이다. 따라서 p의 값에 따라 수열 $\{a_n\}$의 수렴 여부가 달라진다.

제시문 **<나>**에서 구한 점 P_n의 x좌표를 x_n이라 할 때 다음 문제에 답하시오.

2-1. $f(x)=3x^2$에 대하여 점 $\mathrm{P}_1(1,3)$, $d=\dfrac{1}{5}$일 때, 수열 $\{x_n\}$을 귀납적으로 정의하시오.

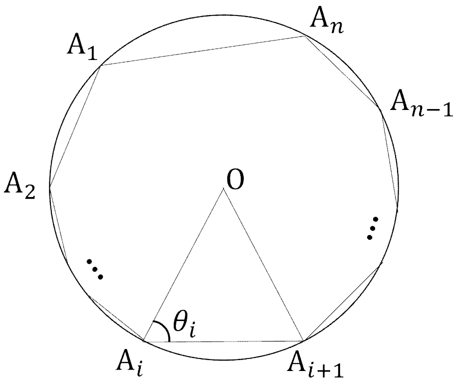
2-2. $f(x)=3(x^2-x)$에 대하여 점 $\mathrm{P}_1(1,0)$일 때, 수열 $\{x_n\}$이 수렴하도록 하는 d의 값의 범위를 구하시오.

계 열 문 항

<라>

반지름의 길이가 1인 원 O에 n각형이 내접하고 있다. n각형의 꼭짓점을 각각 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$이라 하자. 원의 중심 O는 n각형의 내부에 있고 $\theta_i = \angle \mathrm{OA}_i\mathrm{A}_{i+1}$이다. (단, $\theta_n = \angle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_1$)

현 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$의 길이를 x, 원의 중심 O에서 현 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$에 내린 수선의 길이를 h라 하면 삼각형 $\mathrm{OA}_i\mathrm{A}_{i+1}$의 넓이는 $\frac{1}{2}xh$이다.



<마>

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 그래프가 위로 볼록이면 그 구간에 있는 n개의 점 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

가 성립한다. 여기서 등호는 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$일 때 성립한다.

<바>

기원전 3세기의 고대 그리스 수학자 아르키메데스는 원에 내접하는 정다각형의 둘레와 외접하는 정다각형의 둘레를 비교하여 원주율을 계산하였다. 원의 둘레는 그 원에 외접하는 정다각형의 둘레보다 짧고 내접하는 정다각형의 둘레보다 길다. 이때 정다각형의 변이 많아질수록 외접하는 정다각형의 둘레와 내접하는 정다각형의 둘레의 차는 작아지므로 정다각형의 둘레는 원의 둘레에 가까워진다. 아르키메데스는 원에 내접하는 정96각형의 둘레와 원에 외접하는 정96각형의 둘레를 구하여 원주율이 $3\frac{10}{71}$보다 크고 $3\frac{1}{7}$보다 작은 것을 보였다. 이 값을 계산하면 원주율은 3.1408과 3.1429 사이에 있음을 알 수 있다. 원에 내접하는 정n각형의 둘레와 외접하는 정n각형의 둘레에서 n의 값이 한없이 커질 때 극한을 구하면 원주율을 구할 수 있다.

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 제시문 **<라>**의 원에 내접하는 n각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i)$임을 보이고 그 넓이의 최댓값을 구하시오.

3-2. 다음 <보기>와 수열의 극한을 이용하여 반지름의 길이가 1인 원의 넓이는 π임을 보이시오.

< 보기 >

원의 넓이는 그 원에 외접하는 n각형의 넓이보다 작고 내접하는 n각형의 넓이보다 크다.