<수리계열(수학)>

[숙명여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	2022학년도 자연계열 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분, 기하, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	합성함수, 역함수, 미분, 수열, 수학적 귀납법
예상 소요 시간	90분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

계 열 문 항

● 세 집합 X, Y, Z에 대하여, 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$의 합성함수는 $g \circ f: X \to Z$ 이고,
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$와 같이 나타낼 수 있다.

● 세 함수 f, g, h에 대하여, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$이다. 즉, 함수의 합성에서 결합법칙이 성립한다.

● 함수 $f: X \to Y$가 일대일대응일 때, 집합 Y의 각 원소 y에 대하여 $f(x) = y$인 집합 X의 원소 x가 오직 하나 존재한다. 따라서 Y의 각 원소 y에 $f(x) = y$인 집합 X의 원소 x를 대응시키면 Y를 정의역, X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 f의 역함수라고 하고, 이것을 기호로 f^{-1}와 같이 나타낸다. 즉,
$f^{-1}: Y \to X$, $x = f^{-1}(y)$
이다. 또한 이로부터 다음을 알 수 있다.
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \ (x \in X)$,
$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \ (y \in Y)$
즉, 합성함수 $f^{-1} \circ f$는 집합 X에서의 항등함수이고, 합성함수 $f \circ f^{-1}$는 집합 Y에서의 항등함수이다.

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고,

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(x) \qquad (1)$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

1-2. 실수 전체에서 정의된 두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $F(x)=g(x)+h(x)$라 하자.
함수 F의 역함수가 존재하고,

$$(g \circ F)(x)=h(x), \qquad (h \circ F)(x)=g(x) \tag{2}$$

일 때, $g(5)$의 값을 구하시오.

계 열 문 항

● 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

● 함수 $g(x)$가 유리함수일 때, x의 범위에 따른 함숫값의 범위를 다음과 같이 어림할 수 있다. 예를 들어 닫힌구간 $[-2,-1]$에서 $g(x)=\dfrac{3x+1}{x+4}$의 범위를 알아보자.

$-2 \le x \le -1$일 때 $x+4>0$이므로,

$\dfrac{3x+1}{x+4}=\dfrac{3(x+4)-11}{x+4}=\dfrac{3(x+4)}{x+4}-\dfrac{11}{x+4} \le 3$을 얻는다.

따라서, $-2 \le x \le -1$일 때 $g(x) \le 3$임을 알 수 있다.

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

자연수 n에 대하여, 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

● $a_1=3$

● $f(x)=x^3+x-2$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(a_n, f(a_n))$에서의 접선을 l_n이라 할 때,

l_n의 x절편을 a_{n+1}이라 하자.

2-1. a_{n+1}을 a_n으로 나타내시오.

2-2. $1 \le a_n \le 3$일 때, $|a_{n+1}-1| \le \dfrac{2}{3}|a_n-1|$임을 보이시오.

계 열 문 항

● 양수 x_1, x_2에 대하여, $x_1x_2=1$이면 $1+x_1x_2 \le x_1+x_2$가 성립함을 보일 수 있다.

① $x_1=x_2$이면 $x_1=x_2=1$이고 $1+x_1x_2=1+1=2$이므로 $1+x_1x_2 \le x_1+x_2$이다.

② $x_1 \ne x_2$이면 $x_1 > x_2$라 가정할 수 있고 이 때 $x_1>1$, $x_2<1$ 이다.

따라서 $1-x_1<0$, $1-x_2>0$ 이므로

$(1-x_1)(1-x_2)=1-x_1-x_2+x_1x_2<0$ 이고

$1+x_1x_2<x_1+x_2$가 성립한다.

①, ② 에서 $x_1x_2=1$이면 $1+x_1x_2 \le x_1+x_2$가 성립하고 등호는 $x_1=x_2$일 때 성립한다.

● n개의 양수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여

$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 산술평균, $(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}$을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 기하평균이라 한다.

$n=2$ 인 경우,

$x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=\left(\sqrt{x_1}\right)^2-2\sqrt{x_1x_2}+\left(\sqrt{x_2}\right)^2=\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \ge 0$이므로,

$\frac{x_1+x_2}{2} \ge \sqrt{x_1x_2}$이 성립한다.

한편 $y_1=\frac{x_1}{\sqrt{x_1x_2}}$, $y_2=\frac{x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$라 하면

$\frac{y_1+y_2}{2} \ge \sqrt{y_1y_2}=\sqrt{\frac{x_1}{\sqrt{x_1x_2}}\frac{x_2}{\sqrt{x_1x_2}}}=1$ 이므로 $y_1+y_2 \ge 2$ 이다.

즉 $x_1x_2=1$ 이면 $x_1+x_2 \ge 2$ 임을 알 수 있다.

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

자연수 n에 대하여 다음 명제를 $P(n)$이라 하자.

> n개의 양수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여
> $x_1x_2\cdots x_n=1$ 이면 $x_1+x_2+\cdots+x_n \ge n$ 이다.

3-1. $P(k)$가 참이면 $P(k+1)$도 참임을 다음 두 가지 경우로 나누어 보이시오.

① $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$인 경우

② $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$이 아닌 경우

3-2. $P(n)$이 참일 때, n개의 양수 $t_1, t_2, \cdots, t_n$에 대하여 부등식

$$\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{n} \ge (t_1t_2\cdots t_n)^{1/n}$$

이 성립함을 보이시오.

3. 출제 의도

함수, 미분과 적분, 방정식과 부등식, 함수의 증가와 감소, 함수의 그래프와 그 활용, 명제, 수학적 귀납법, 절대부등식 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다.

1. 함수의 뜻, 일대일대응, 항등함수, 합성함수, 합성에서의 결합법칙, 일차함수, 역함수를 이용한 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지 평가한다.

2. 수열의 귀납적 정의 및 다항함수의 미분법, 접선의 방정식을 이용한 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지 평가한다.

3. 제시문들을 읽고 함수의 합성, 미분, 수학적 귀납법, 부등식의 증명에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 1	교육과정*	**[수학] – V 함수 – 1 함수 - 1. 함수의 뜻과 그래프** **[수학] – V 함수 – 1 함수 - 2. 합성함수** **[수학] – V 함수 – 1 함수 - 3. 역함수**
	성취기준·성취수준**	**[수학] – V 함수 – 1 함수 - 1. 함수의 뜻과 그래프** ① 함수의 개념을 이해하고, 특히 일대일대응, 상수함수의 의미를 이해한다. **[수학] – V 함수 – 1 함수 - 2. 합성함수** ① 함수의 합성을 이해하고, 함수의 합성에서의 결합법칙을 이해한다. **[수학] – V 함수 – 1 함수 - 3. 역함수** ① 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수와 역함수를 합성하여 계산할 수 있다.
문제 1-1	교육과정	**[수학] – V 함수 – 1 함수 - 2. 합성함수** **[수학] – V 함수 – 1 함수 - 3. 역함수**
	성취기준·성취수준	**[수학] - V 함수 - 1 함수 - 2. 합성함수** ① 함수의 합성을 이해하고, 함수의 합성에서의 결합법칙을 이해한다. **[수학] - V 함수 - 1 함수 - 3. 역함수** ① 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수와 역함수를 합성하여 계산할 수 있다.
문제 1-2	교육과정	**[수학] - V 함수 - 1 함수 - 2. 합성함수** **[수학] - V 함수 - 1 함수 - 3. 역함수**
	성취기준·성취수준	**[수학] - V 함수 - 1 함수 - 2. 합성함수** ① 함수의 합성을 이해하고, 함수의 합성에서의 결합법칙을 이해한다. **[수학] - V 함수 - 1 함수 - 3. 역함수** ① 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수와 역함수를 합성하여 계산할 수 있

문항 및 제시문		관련 성취기준
		다.
제시문 2	교육과정*	**[수학 Ⅱ] - Ⅱ 미분 - 2. 도함수의 활용** **[수학] - Ⅳ 함수 - 4. 유리함수**
	성취기준· 성취수준**	**[수학 Ⅱ] - Ⅱ 미분 - 2. 도함수의 활용** 접선의 방정식을 구할 수 있다. **[수학] - Ⅳ 함수 - 4. 유리함수** 유리식의 성질을 이해한다.
문제 2-1	교육과정	**[수학 Ⅱ] - Ⅱ 미분 - 2. 도함수의 활용** **[수학 Ⅰ] - Ⅲ 수열 - 3 수학적 귀납법**
	성취기준· 성취수준	**[수학 Ⅱ] - Ⅱ 미분 - 2. 도함수의 활용** 접선의 방정식을 구할 수 있다. **[수학 Ⅰ] - Ⅲ 수열 - 3 수학적 귀납법** 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
문제 2-2	교육과정	**[수학] - 1. 다항식** **[수학] - Ⅳ. 집합과 명제 - 5. 명제의 증명과 절대부등식의 증명**
	성취기준· 성취수준	**[수학] - 1. 다항식** 다항식의 사칙연산 및 인수분해를 할 수 있다. **[수학] - Ⅳ. 집합과 명제 - 5. 명제의 증명과 절대부등식의 증명** 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
제시문 3	교육과정*	**[수학] - Ⅵ 집합과 명제 - $\boxed{2}$ 명제 - 4. 절대부등식** **[수학 Ⅰ] - Ⅲ 수열 - 3 수학적 귀납법**
	성취기준· 성취수준**	**[수학] - Ⅵ 집합과 명제 - $\boxed{2}$ 명제 - 4. 절대부등식** ① 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. **[수학 Ⅰ] - Ⅲ 수열 - 3 수학적 귀납법** ① 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
문제 3-1	교육과정	**[수학 Ⅰ] - Ⅲ 수열 - 3 수학적 귀납법**
	성취기준· 성취수준	**[수학 Ⅰ] - Ⅲ 수열 - 3 수학적 귀납법** ① 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
문제 3-2	교육과정	**[수학] - Ⅵ 집합과 명제 - $\boxed{2}$ 명제 - 4. 절대부등식**
	성취기준· 성취수준	**[수학] - Ⅵ 집합과 명제 - $\boxed{2}$ 명제 - 4. 절대부등식** ① 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외	천재교과서	2017	12-39, 199-206, 233-239
	수학	이준열 외	천재교육	2017	220~240
	수학	고성은 외	좋은책신사고	2017	195-196
	수학 I	고성은 외	좋은책신사고	2017	146-148
	수학 I	김원경 외	비상	2017	145-150
	수학 II	이준열 외	천재교육	2017	74-77

5. 문항 해설

1. 제시문에서는 합성함수와 함수의 합성에서 결합법칙에 대해 설명하였다. 주어진 함수 f가 일대일대응일 때, f의 역함수를 정의할 수 있고, 함수 f와 역함수 f^{-1}의 합성을 통해 또한 항등함수로 나타낼 수 있음을 제시하였다. 제시문에서 주어진 함수와 역함수의 관계, 또 두 함수의 합성을 통해 항등함수를 얻을 수 있는 사실을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

2. 다항함수의 접선의 방정식을 구하고, 이를 수열의 귀납적 정의로 연결지을 수 있는지 평가한다. 또한 제시문과 다항식, 유리식의 연산을 조합하여 간단한 절대부등식을 증명할 수 있는지 평가한다.

3. 제시문에서는 n개의 양수의 산술평균과 기하평균을 설명하고 이들 간의 관계를 소개한다. 두 개의 양수에 대해 산술평균이 기하평균보다 크거나 같음을 증명하는 과정과 수학적 귀납법을 이용하여 일반적인 경우로 확장하는 과정에 필요한 내용을 제시하였다. 제시문에 소개된 방법을 일반적인 경우로 확장하는 과정을 추론하고 이를 바탕으로 일반적인 경우로 확장하여 산술평균과 기하평균간의 부등식을 증명할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	① 양변의 왼쪽에 f^{-1}를 합성하여 결합법칙을 적용한다.	3
	② $f(x)=x$임을 얻고, $f(5)=5$를 구한다.	7
1-2	주어진 두 식 (2)의 합을 구하고, $(F \circ F)(x)=F(x)$임을 보인다.	5
	양변의 왼쪽에 F^{-1}를 합성하여 결합법칙을 적용하여, $F(x)=x$임을 얻는다.	2
	$g(x)=h(x)$임을 알고, $g(x)=h(x)=\frac{1}{2}x$, $g(5)=\frac{5}{2}$을 구할 수 있다.	3
2-1	① $a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$을 안다.	3
	② 식을 정리하여 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n^3+2}{3a_n^2+1}$을 얻는다.	7
2-2	$a_{n+1}-1=(a_n-1)\left(\dfrac{2a_n^2-a_n-1}{3a_n^2+1}\right)$을 얻는다.	3
	$1 \le a_n \le 3$ 범위에서 $2a_n^2-a_n-1 \ge 0$, $3a_n^2+1>0$ 및	3

	$a_n + \frac{3}{5} > 0$임을 안다.	
	$\left\| \frac{2a_n^2 - a_n - 1}{3a_n^2 + 1} \right\| \le \frac{2}{3}$을 얻고, 증명을 완료한다.	4
3-1	① $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1}$이면 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$임을 안다	3
	② 1보다 큰 x_i와 1보다 작은 x_j가 존재하므로 부등식 $1 + x_1x_2 < x_1 + x_2$와 $P(k)$를 이용하여 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} \ge k+1$을 보인다.	7
3-2	$y_i = \frac{t_i}{\sqrt[n]{t_1t_2 \cdots t_n}}$, $(i = 1, \cdots, n)$이라 놓는다	3
	$P(n)$이 참이므로 부등식 $y_1 + y_2 + \cdots + y_n \ge n$을 이용한다.	3
	원하는 부등식이 성립함을 보인다.	4

7. 예시 답안

1-1.

식(1)에서 양변의 왼쪽에 f^{-1}를 합성해 주면, $f^{-1} \circ (f \circ f \circ f)(x) = f^{-1} \circ (f \circ f)(x)$이고, 정리하면,

$$(\text{좌변}) = f^{-1} \circ (f \circ f \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)((f \circ f)(x)) = (f \circ f)(x),$$
$$(\text{우변}) = f^{-1} \circ (f \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(f(x)) = f(x)$$

을 얻어 다음과 같이 쓸 수 있다. $(f \circ f)(x) = f(x)$. 다시 한 번 양변의 왼쪽에 f^{-1}를 합성해 주면, $f^{-1} \circ (f \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$이고, 정리하면, $f(x) = x$를 얻게 된다. $f(x)$는 일차함수이고 역함수가 존재한다. 따라서, $f(5) = 5$임을 알 수 있다.

1-2.

주어진 두 식 (2)의 합을 구하면

$$g(F(x)) + h(F(x)) = g(x) + h(x) \tag{3}$$

을 얻고, 이를 다시 쓰면,

$$g(F(x)) + h(F(x)) = F(F(x)) = (F \circ F)(x) = F(x)$$

임을 알 수 있다. 또한 $F(x)$의 역함수가 존재하므로, 문제 1-1의 풀이와 마찬가지로 양변의 왼쪽에 F^{-1}를 합성해 주면,

$F^{-1} \circ (F \circ F)(x) = (F^{-1} \circ F)(x)$이고, 정리하면, $F(x) = x$를 얻게 된다. 이를 식 (2)에 대입하면, $g(x) = h(x)$임을 알 수 있다. $F(x) = g(x) + h(x) = x$이고, $g(x) = h(x)$이므로, $g(x) = h(x) = \frac{1}{2}x$ 임을 알 수 있다. 따라서 $g(5) = \frac{5}{2}$임을 알 수 있다.

2-1.

l_n은 곡선 $y=f(x)$의 $(a_n, f(a_n))$에서의 접선이므로, 접선의 방정식 공식에 의하여 l_n: $y-f(a_n)=f'(a_n)(x-a_n)$이고, a_{n+1}은 l_n의 x절편이므로, $(a_{n+1}, 0)$은 l_n의 한 점이다. 따라서 $-f(a_n)=f'(a_n)(a_{n+1}-a_n)$ 및 $a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$이 성립한다.

도함수를 계산하면 $f'(x)=3x^2+1$이므로, 이를 위 식에 대입하여 정리하면 $a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}=a_n-\dfrac{a_n^3+a_n-2}{3a_n^2+1}=\dfrac{2a_n^3+2}{3a_n^2+1}$이다.

2-2.

위의 식에서 양변에 1를 빼고 절댓값을 취한 뒤 인수분해하여 정리하면 다음과 같다.

$$|a_{n+1}-1|=\left|\frac{2a_n^3+2}{3a_n^2+1}-1\right|=\left|\frac{2a_n^3-3a_n^2+1}{3a_n^2+1}\right|=\left|\frac{(a_n-1)(2a_n^2-a_n-1)}{3a_n^2+1}\right|=|a_n-1|\left|\frac{2a_n^2-a_n-1}{3a_n^2+1}\right|$$

여기서, 모든 n에 대하여 $1\le a_n\le 3$이므로 $2a_n^2-a_n-1\ge 0$, $3a_n^2+1>0$ 및 $a_n+\dfrac{3}{5}>0$이므로,

$$\left|\frac{2a_n^2-a_n-1}{3a_n^2+1}\right|=\frac{2a_n^2-a_n-1}{3a_n^2+1}=\frac{2(a_n^2+\frac{1}{3})-a_n-\frac{5}{3}}{3(a_n^2+\frac{1}{3})}=\frac{2(a_n^2+\frac{1}{3})}{3(a_n^2+\frac{1}{3})}-\frac{a_n+\frac{5}{3}}{3(a_n^2+\frac{1}{3})}\le\frac{2(a_n^2+\frac{1}{3})}{3(a_n^2+\frac{1}{3})}=\frac{2}{3}$$

이다. 따라서, $|a_{n+1}-1|\le\dfrac{2}{3}|a_n-1|$를 얻는다.

3-1.

명제 $P(k)$가 참이라 하자.

$x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}$이 양수이고 $x_1x_2\cdots x_{k+1}=1$ 이라 할 때

① $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$이면 $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}=1$이고

$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}=k+1$ 이다. 따라서 $x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}\ge k+1$이 성립한다.

② $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}$이 모두 같지는 않다면 1보다 큰 x_i와 1보다 작은 x_j가 존재한다.

실수의 곱은 교환법칙이 성립하므로 1보다 큰 x_i를 x_1이라 하고 1보다 작은 x_j를 x_2라 하면 $1-x_1<0$, $1-x_2>0$ 이다.

$(1-x_1)(1-x_2)=1-x_1-x_2+x_1x_2<0$ 에서

$1+x_1x_2<x_1+x_2$이 성립한다.

이 식을 이용하면

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}>1+x_1x_2+x_3+\cdots+x_{k+1} \qquad \cdots (1)$$

이다.

한편 $P(k)$가 참이고 $(x_1x_2)x_3 \cdots x_{k+1} = 1$ 이므로

$x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} \geq k$

이 성립한다.

따라서 부등식 (1)에서

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} > 1 + x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} \geq k+1$

을 얻는다.

①, ②에서 $P(k)$가 참이면 $P(k+1)$도 참임을 알 수 있다.

3-2.

n개의 양수 $t_1, t_2, \cdots, t_n$에 대하여

$$x_1 = \frac{t_1}{\sqrt[n]{t_1t_2 \cdots t_n}},\ x_2 = \frac{t_2}{\sqrt[n]{t_1t_2 \cdots t_n}},\ \cdots,\ x_n = \frac{t_n}{\sqrt[n]{t_1t_2 \cdots t_n}}$$

이라 하면 ‘$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 도 양수이고 $x_1x_2 \cdots x_n = 1$ 이다.

$P(n)$이 참이므로 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ 이다.

따라서 $x_i = \dfrac{t_i}{\sqrt[n]{t_1t_2 \cdots t_n}}$ $(i = 1, \cdots, n)$ 를 위 식에 대입하면

$$\frac{t_1}{\sqrt[n]{t_1t_2 \cdots t_n}} + \frac{t_2}{\sqrt[n]{t_1t_2 \cdots t_n}} + \cdots + \frac{t_n}{\sqrt[n]{t_1t_2 \cdots t_n}} = \frac{t_1 + \cdots + t_n}{\sqrt[n]{t_1t_2 \cdots t_n}} \geq n$$

이고 $\sqrt[n]{t_1t_2 \cdots t_n} > 0$이므로 양변에 $\sqrt[n]{t_1t_2 \cdots t_n}$를 곱하면 부등식

$$\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n} \geq (t_1t_2 \cdots t_n)^{1/n}$$

을 얻는다.