# 2022학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수 답안
## - 자 연 계 열 문 항 -

■1-1.

식(1)에서 양변의 왼쪽에 $f^{-1}$를 합성해 주면, $f^{-1} \circ (f \circ f \circ f)(x) = f^{-1} \circ (f \circ f)(x)$ 이고, 정리하면,

$$(\text{좌변}) = f^{-1} \circ (f \circ f \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)((f \circ f)(x)) = (f \circ f)(x),$$
$$(\text{우변}) = f^{-1} \circ (f \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(f(x)) = f(x)$$

을 얻어 다음과 같이 쓸 수 있다. $(f \circ f)(x) = f(x)$. 다시 한 번 양변의 왼쪽에 $f^{-1}$를 합성해 주면, $f^{-1} \circ (f \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$이고, 정리하면, $f(x) = x$를 얻게 된다. $f(x)$는 일차함수이고 역함수가 존재한다. 따라서, $f(5) = 5$임을 알 수 있다.

■1-2.

주어진 두 식 (2)의 합을 구하면

$$g(F(x)) + h(F(x)) = g(x) + h(x) \tag{3}$$

을 얻고, 이를 다시 쓰면,

$$g(F(x)) + h(F(x)) = F(F(x)) = (F \circ F)(x) = F(x)$$

임을 알 수 있다. 또한 $F(x)$의 역함수가 존재하므로, 문제 1-1의 풀이와 마찬가지로 양변의 왼쪽에 $F^{-1}$를 합성해 주면,

$F^{-1} \circ (F \circ F)(x) = (F^{-1} \circ F)(x)$이고, 정리하면, $F(x) = x$를 얻게 된다. 이를 식 (2)에 대입하면, $g(x) = h(x)$임을 알 수 있다. $F(x) = g(x) + h(x) = x$이고, $g(x) = h(x)$이므로, $g(x) = h(x) = \frac{1}{2}x$ 임을 알 수 있다. 따라서 $g(5) = \frac{5}{2}$임을 알 수 있다.

■2-1.

$l_n$은 곡선 $y = f(x)$의 $(a_n, f(a_n))$에서의 접선이므로, 접선의 방정식 공식에 의하여 $l_n$: $y - f(a_n) = f'(a_n)(x - a_n)$이고, $a_{n+1}$은 $l_n$의 $x$절편이므로, $(a_{n+1}, 0)$은 $l_n$의 한 점이다. 따라서 $-f(a_n) = f'(a_n)(a_{n+1} - a_n)$ 및 $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$이 성립한다.

도함수를 계산하면 $f'(x) = 3x^2 + 1$이므로, 이를 위 식에 대입하여 정리하면 $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^3 + a_n - 2}{3a_n^2 + 1} = \frac{2a_n^3 + 2}{3a_n^2 + 1}$이다.

■2-2.

위의 식에서 양변에 1를 빼고 절댓값을 취한 뒤 인수분해하여 정리하면 다음과 같다.

$$|a_{n+1}-1| = \left|\frac{2a_n^3+2}{3a_n^2+1}-1\right| = \left|\frac{2a_n^3-3a_n^2+1}{3a_n^2+1}\right| = \left|\frac{(a_n-1)(2a_n^2-a_n-1)}{3a_n^2+1}\right| = |a_n-1|\left|\frac{2a_n^2-a_n-1}{3a_n^2+1}\right|$$

여기서, 모든 $n$에 대하여 $1 \le a_n \le 3$이므로 $2a_n^2-a_n-1 \ge 0$, $3a_n^2+1>0$ 및 $a_n+\frac{3}{5}>0$ 이므로,

$$\left|\frac{2a_n^2-a_n-1}{3a_n^2+1}\right| = \frac{2a_n^2-a_n-1}{3a_n^2+1} = \frac{2(a_n^2+\frac{1}{3})-a_n-\frac{5}{3}}{3(a_n^2+\frac{1}{3})} = \frac{2(a_n^2+\frac{1}{3})}{3(a_n^2+\frac{1}{3})} - \frac{a_n+\frac{5}{3}}{3(a_n^2+\frac{1}{3})} \le \frac{2(a_n^2+\frac{1}{3})}{3(a_n^2+\frac{1}{3})} = \frac{2}{3}$$

이다. 따라서, $|a_{n+1}-1| \le \frac{2}{3}|a_n-1|$를 얻는다.

■3-1.

명제 $P(k)$가 참이라 하자.

$x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}$이 양수이고 $x_1x_2 \cdots x_{k+1}=1$ 이라 할 때

① $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$이면 $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}=1$이고

$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}=k+1$ 이다. 따라서 $x_1+x_2+\cdots+x_{k+1} \ge k+1$이 성립한다.

② $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}$이 모두 같지는 않다면 1보다 큰 $x_i$와 1보다 작은 $x_j$가 존재한다.

실수의 곱은 교환법칙이 성립하므로 1보다 큰 $x_i$를 $x_1$이라 하고 1보다 작은 $x_j$를 $x_2$라 하면 $1-x_1<0$, $1-x_2>0$ 이다.

$(1-x_1)(1-x_2)=1-x_1-x_2+x_1x_2<0$ 에서

$1+x_1x_2<x_1+x_2$이 성립한다.

이 식을 이용하면

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1} > 1+x_1x_2+x_3+\cdots+x_{k+1} \qquad \cdots (1)$$

이다.

한편 $P(k)$가 참이고 $(x_1x_2)x_3 \cdots x_{k+1}=1$ 이므로

$x_1x_2+x_3+\cdots+x_{k+1} \ge k$

이 성립한다.

따라서 부등식 (1)에서

$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1} > 1+x_1x_2+x_3+\cdots+x_{k+1} \ge k+1$

을 얻는다.

①, ②에서 $P(k)$가 참이면 $P(k+1)$도 참임을 알 수 있다.

■3-2.

$n$개의 양수 $t_1, t_2, \cdots, t_n$에 대하여

$$x_1 = \frac{t_1}{\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}},\ \ x_2 = \frac{t_2}{\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}},\ \cdots,\ \ x_n = \frac{t_n}{\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}}$$

이라 하면 ‘$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 도 양수이고 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ 이다.

$P(n)$이 참이므로 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ 이다.

따라서 $x_i = \dfrac{t_i}{\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}}$ $(i = 1, \cdots, n)$ 를 위 식에 대입하면

$$\frac{t_1}{\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}} + \frac{t_2}{\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}} + \cdots + \frac{t_n}{\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}} = \frac{t_1 + \cdots + t_n}{\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}} \geq n$$

이고 $\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n} > 0$이므로 양변에 $\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}$를 곱하면 부등식

$$\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n} \geq (t_1 t_2 \cdots t_n)^{1/n}$$

을 얻는다.