

[숙명여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

| | | |
|----------------------|---|---|
| 유형 | <input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사 | |
| 진행명 | 2021학년도 자연계열 모의논술 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연계열 / 1-1(a), 1-1(b), 1-2(a), 1-2(b), 1-3(a), 1-3(b) | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학, 수학I, 수학II, 미적분 |
| | 핵심개념 및 용어 | 명제, 평균값 정리, 함수의 증가와 감소, 미분, 급수의 수렴과 발산, 지수함수와 로그함수, 로그함수와 그래프 |
| 예상 소요 시간 | 110분 / 전체 120분 | |

2. 문항 및 제시문

<가>

자연수 n 의 양의 약수의 총합이 $2n$ 이 될 때, n 을 완전수라 부른다. 예를 들어 6은 양의 약수가 1, 2, 3, 6이므로 이를 모두 더한 값이 6의 2배가 되어 완전수이다. 또 다른 예로 28은 양의 약수가 1, 2, 4, 7, 14, 28이므로 이를 모두 더하면 28의 2배가 되어 완전수이다. 이보다 더 큰 완전수로는 496, 8128 등이 있으며 완전수가 유한한 지 아니면 무한히 많은지는 알려져 있지 않다.

자연수 n 을 소인수분해 하였을 때, $n = pq$ (단, p, q 는 $p < q$ 인 소수)인 경우 n 이 완전수가 되는지 알아보자. $n = pq$ 의 양의 약수는 1, p , q , pq 이므로 약수들의 합은 $1 + p + q + pq$ 이다. 따라서 n 이 완전수가 되기 위하여 $1 + p + q + pq = 2pq$ 가 되어야 한다. 즉, $pq - p - q - 1 = 0$ 이다. 이를 풀면 $p = 2$, $q = 3$ 이 되어야 함을 확인할 수 있다. 그러므로 두 소수의 곱인 완전수는 6이 유일함을 알 수 있다.

이제 자연수 n 이 $n = 4m$ (m 은 홀수)일 때 n 이 완전수가 될 조건을 구해보자. m 이 홀수이므로 n 의 양의 약수는 m 의 양의 약수를 1배, 2배, 4배한 수이다. m 의 양의 약수의 총합을 $f(m)$ 이라 하면 n 의 양의 약수의 총합은 $(1+2+4)f(m) = 7f(m)$ 이다. 그러므로 n 이 완전수라면 $7f(m) = 8m$ 을 만족시킨다. 이때 7은 소수이므로 m 은 7의 배수이다. $m = 7k$ (k 는 자연수)로 두면 $f(m) = 8k$ 이다. 만약 $k \geq 2$ 이면, 1, k , $7k$ 가 모두 서로 다른 m 의 양의 약수이므로 $f(m) \geq 1 + k + 7k = 8k + 1$ 이 되어 모순이다. 만약 $k = 1$ 이라면 $n = 28$ 이고 이는 완전수이다. 따라서 $n = 4m$ 인 완전수는 28뿐임을 알 수 있다.

<나>

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다고 한다. 또, $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) > f(x_2)$ 이

면 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다고 한다.

함수 $f(x)$ 가 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면 이 구간에 속하는 두 실수 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)에 대하여 닫힌구간 $[x_1, x_2]$ 에서 연속이고 열린구간 (x_1, x_2) 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 (x_1, x_2) 에 적어도 하나 존재한다.

이제 아래의 세 가지 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 생각해 보자.

- (1) $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 연속이다.
- (2) $x > 0$ 일 때 $f(x)$ 가 미분가능하고 $f'(x) < 1$ 이다.
- (3) $f(0) = 0$ 이다.

이때 $x > 0$ 이면 $f(x) < x$ 임을 평균값 정리를 이용하여 다음과 같이 보일 수 있다. 함수 $f(x)$ 가 조건 (1)과 (2)를 만족시키므로 닫힌구간 $[0, x]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, x)$ 에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(y)$ 가 되는 y 가 열린구간 $(0, x)$ 에 존재한다.

이 식을 정리하면 $f(x) - f(0) = xf'(y)$ 이다. 여기서 $y > 0$ 이므로 조건 (2)에 의하여 $f'(y) < 1$ 이다. 조건 (3)에서 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = xf'(y) < x$ 이다. 그러므로 $f(x) < x$ 이다.

<다>

급수

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^8}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2^{n-2}}}\right) + \dots$$

가 수렴하도록 하는 실수 x 의 값의 범위를 찾아보자. 우선 로그의 진수는 양수이므로

$$1 - \frac{1}{x} > 0 \text{이고 } 1 + \frac{1}{x} > 0$$

이다. 따라서 $|x| > 1$ 은 주어진 급수가 수렴하기 위한 필요조건임을 알 수 있다. 또한 로그의 성질을 사용하여 이 급수의 제 n 항까지의 부분합 $S_n (n \geq 2)$ 을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_n &= \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{x^{2^{n-2}}}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{x^{2^{n-2}}}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{x^{2^{n-2}}}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{x^{2^{n-1}}}\right) \end{aligned}$$

또한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2^{n-1}}} = \begin{cases} 0 & (|x| > 1) \\ 1 & (|x| = 1) \\ \infty & (|x| < 1) \end{cases}$ 이므로 $|x| > 1$ 일 때 S_n 이 수렴한다. 그러므로 주어진 급수가 수렴하기 위한 x 의 범위는 $|x| > 1$ 이다.

1-1. 제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1(a). 자연수 n 이 $n = p^k$ 이면 n 이 완전수가 아님을 보이시오. (단, p 는 소수이고 k 는 자연수이다.)

1-1(b). 자연수 n 이 $n = 8m$ (m 은 홀수)이면 n 이 완전수가 아님을 보이시오.

1-2. 제시문 <나>를 읽고 함수 $f(x)$ 가 아래의 네 가지 조건을 만족시킬 때 다음 문제에 답하시오.

- (1) $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 연속이다.
- (2) $x > 0$ 일 때 $f(x)$ 가 미분가능하다.
- (3) $f(0) = 0$ 이다.
- (4) $f'(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

1-2(a). $f'(x) = f(1)$ 이 되는 x 가 존재함을 보이시오.

1-2(b). $x > 0$ 일 때 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 라고 하면 $g(x)$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가함을 보이시오.

1-3. 제시문 <다>를 읽고 급수

$$\ln(1+x) + \ln(1+x^2) + \ln(1+x^4) + \dots + \ln(1+x^{2^{n-1}}) + \dots$$

에 대하여 다음 문제에 답하시오.

1-3(a). 위 급수가 수렴하도록 하는 실수 x 의 값의 범위를 구하시오.

1-3(b). 위 급수의 합을 $f(x)$ 라고 할 때 1-3(a)에서 구한 x 의 범위에서 $y = f(x)$ 의 그래프를 그리시오.

3. 출제 의도

명제, 함수, 미분, 지수함수와 로그함수, 급수 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제 반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 명제의 증명, 평균값 정리, 함수의 증가와 감소, 미분, 급수의 수렴과 발산, 지수함수와 로그함수, 함수의 그래프에 대한 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

| 문항 및 제시문 | | 관련 성취기준 |
|----------|-------------|---|
| 제시문 1 | 교육과정* | [수학] - (3) 수와 연산 - ㉔ 명제 [10수학03-05] 명제의 역과 대우를 이해한다. [10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. |
| | 성취기준·성취수준** | [수학] - (3) 수와 연산 - (나) 명제 [10수학03-05] 명제의 역과 대우를 이해한다. [10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. |
| 제시문 2 | 교육과정 | [수학II] - (2) 미분 - ㉓ 도함수의 활용 [12수학II02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [수학II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학II02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학II02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. |
| 제시문 3 | 교육과정 | [미적분] - (1) 수열의 극한 - ㉔ 급수 [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [미적분] - (1) 수열의 극한 - (나) 급수 [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. |
| 문제 1-1 | 교육과정 | [수학] - (3) 수와 연산 - ㉔ 명제 [10수학03-05] 명제의 역과 대우를 이해한다. [10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. |

| 문항 및 제시문 | | 관련 성취기준 |
|----------|---------------|--|
| | 성취기준· 성취수준 | [수학] - (3) 수와 연산 - (나) 명제 [10수학03-05] 명제의 역과 대우를 이해한다. [10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. |
| 문제 1-2 | 교육과정 | [수학II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학II02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학II02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. |
| | 성취기준· 성취수준 | [수학II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학II02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학II02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. |
| 문제 1-3 | 교육과정 | [미적분] - (1) 수열의 극한 - ② 급수 [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. [수학I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ② 지수함수와 로그함수 [12수학I 01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다. [미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. |
| | 성취기준· 성취수준 | [미적분] - (1) 수열의 극한 - (나) 급수 [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. [수학I] - (1) 지수함수와 로그함수 - (나) 지수함수와 로그함수 [12수학I 01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다. [미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. |

*: 교육과학기술부 고시 제 2011-361호[별책 8] "수학과 교육과정"의 일반과목

**: 교육과학기술부 발간 「2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준 : 고등학교 수학」(발간물 등록번호 : 11-1341000-002322-01)의 일반과목

나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행 연도 | 쪽수 |
|-------------|------|-------|--------|-------|----------------|
| 고등학교 교과서 | 수학 | 고성은 외 | 좋은책신사고 | 2018 | 183-194 |
| | 수학 | 김원경 외 | 비상교육 | 2018 | 178-192 |
| | 수학I | 배종수 외 | 금성출판사 | 2018 | 40-50 |
| | 수학I | 이준열 외 | 천재교육 | 2018 | 40-56 |
| | 수학II | 홍성복 외 | 지학사 | 2018 | 74-98 |
| | 수학II | 권오남 외 | 교학사 | 2018 | 83-99 |
| | 미적분 | 김원경 외 | 비상교육 | 2019 | 28-44 75-86 |
| | 미적분 | 고성은 외 | 좋은책신사고 | 2019 | 26-36 76-79 |
| 기타 | | | | | |

5. 문항 해설

제시문 <가>에서는 완전수를 정의하고 어떤 자연수가 완전수가 될 조건을 구하는 방법을 소개한다. <문제 1-1(a), 1-1(b)>에서는 제시문 <가>에서 소개된 증명 방법에 관한 이해를 바탕으로 다른 형태의 자연수가 완전수가 될 수 없음을 증명할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <나>에서는 증가함수의 정의를 기술하고 평균값 정리를 이용하여 부등식을 증명하는 방법을 소개한다. <문제 1-2(a)>에서는 평균값 정리를 이용하여 주어진 도함숫값을 갖는 x 가 존재함을 보일 수 있는지 평가한다. <문제 1-2(b)>에서는 문제에서 주어진 함수의 성질을 이용하여 주어진 함수가 증가함을 보일 수 있는지 평가한다.

제시문 <다>에서는 급수가 수렴하기 위한 조건을 로그의 성질을 사용하여 구한다. <문제 1-3(a)>에서는 제시문 <다>의 내용을 바르게 이해하였는지 평가하기 위하여 같은 상황에서 로그의 성질 및 등비급수의 수렴을 이용하여 제시된 급수가 수렴하기 위한 조건을 구할 수 있는지 평가한다. <문제 1-3(b)>에서는 급수로 정의된 함수의 그래프를 주어진 범위 안에서 바르게 그릴 수 있는지 평가한다.

6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

- ▶ 문제 <1-1(a)>, <1-1(b)>
 1. 제시문 <가>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
 2. 제시문 <가>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
 3. <1-1(a)>에서 p^k 의 양의 약수의 총합을 등비수열의 합으로 바르게 구한다.
 4. <1-1(a)>에서 n 이 완전수라 가정하고 모순임을 논리적으로 보인다.
 5. <1-1(b)>에서 n 이 완전수라 가정하고 m 은 15의 배수임을 보인다.

6. <1-1(b)>에서 $f(m) \geq k + 3k + 5k + 15k$ 가 되어 모순임을 논리적으로 보인다.

▶ 논제 <1-2(a)>, <1-2(b)>

1. 제시문 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <1-2(a)>에서 함수 $f(x)$ 가 조건 (1)과 (2)에 의하여 닫힌구간 $[0,1]$ 에서 평균값 정리의 조건 만족시키는 것을 확인하고 평균값 정리를 이용하여 $f'(x) = f(1)$ 가 되는 x 가 존재함을 보인다.
4. <1-2(b)>에서 $g(x)$ 가 $x > 0$ 에서 증가함을 보이기 위하여 $x > 0$ 일 때 $g'(x) > 0$ 임을 보이면 된다는 것을 파악하고 또한 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0$ 을 보이기 위하여 $x > 0$ 일 때 $xf'(x) - f(x) > 0$ 을 보이면 된다는 것을 파악한다.
5. <1-2(b)>에서 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[0,x]$ 에서 평균값 정리의 조건을 만족시키는 것을 확인하고 함수 $f(x)$ 에 평균값 정리를 적용하여 $f(x) - f(0) = xf'(y)$ 가 되는 y 가 열린구간 $(0,x)$ 에 존재함을 보인다.
6. <1-2(b)>에서 조건 (4)에 의해 $y < x$ 이면 $f'(y) < f'(x)$ 를 이용하여 $xf'(x) - f(x) > 0$ 임을 보인다.

▶ 논제 <1-3(a)>, <1-3(b)>

1. 제시문 <다>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <다>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 주어진 급수의 부분합을 로그의 성질을 이용하여 계산한다.
4. 주어진 급수의 부분합이 수렴하도록 하는 실수 x 의 값의 범위를 구한다.
5. 주어진 급수가 수렴하는 범위에서 $y = f(x)$ 를 구한다.
6. 그래프를 이계도함수 혹은 대칭성을 이용하여 그린다.

■ 각 세부 문제별로 다음의 기준으로 채점한다.

- 1 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
- 2 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
- 3 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 정확하게 충족시키고, 3-6의 요건 중 3가지를 만족하는 경우
- 4 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하는 경우
- 5 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하나 논리 전개 및 계산이 다소 미흡한 경우
- 6 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 1가지를 만족하는 경우
- 7 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지만, 3-6의 요건을 충족시키지 못한 경우
- 8 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지 않은 경우
- 9 등급: 위의 6가지 기준을 대부분 충족시키지 못한 경우

7. 예시 답안

■ 1-1(a)

$n = p^k$ 이면 양의 약수의 총합은 $1 + p + p^2 + \dots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$ 이다.

n 이 완전수라 가정하면 $\frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} = 2n = 2p^k$ 이다.

따라서 $p^{k+1} - 1 = 2p^{k+1} - 2p^k$, 즉 $p^k(p - 2) = -1$ 이다. 이때 $p = 2$ 이면 $0 = -1$ 이므로 모순이고, $p > 2$ 이면 k 는 자연수이므로 좌변은 p 의 배수이나 우변은 p 의 배수가 아니므로 모순이다. 그러므로 n 은 완전수가 될 수 없다.

■ 1-1(b)

m 이 홀수이므로 n 의 양의 약수들은 m 의 양의 약수를 1배, 2배, 4배, 8배한 수이다. 따라서 m 의 양의 약수의 총합을 $f(m)$ 이라 하면 n 의 양의 약수의 총합은 $(1 + 2 + 4 + 8)f(m) = 15f(m)$ 이다. 따라서 n 이 완전수라면 $15f(m) = 16m$ 을 만족시킨다. 그러므로 m 은 15의 배수이다. $m = 15k$ 로 두면 $f(m) = 16k$ 이다. 여기서 $k \geq 1$ 이므로 $k, 3k, 5k, 15k$ 가 모두 서로 다른 m 의 양의 약수이고 $f(m) \geq k + 3k + 5k + 15k$ 가 되어 모순이다. 따라서 n 은 완전수가 아니다.

■ 1-2(a)

함수 $f(x)$ 가 조건 (1)과 (2)를 만족시키므로 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(x)$ 가 되는 x 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다. 조건 (3)에 의하여

$$f(1) = f(1) - f(0) = f'(x)$$

이다. 그러므로 $f'(x) = f(1)$ 가 되는 x 가 존재한다.

■ 1-2(b)

$g(x)$ 가 $x > 0$ 에서 증가함을 보이기 위하여 $x > 0$ 일 때 $g'(x) > 0$ 임을 보이면 된다.

$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ 이고 $x^2 > 0$ 이므로 $xf'(x) - f(x) > 0$ 이면 $g'(x) > 0$ 이다. 따라서

$g'(x) > 0$ 을 보이기 위하여 $x > 0$ 일 때 $xf'(x) - f(x) > 0$ 을 보이면 된다. 함수 $f(x)$ 가 조건 (1)과 (2)를 만족시키므로 닫힌구간 $[0, x]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, x)$ 에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(y)$ 가 되는 y 가 열린구간 $(0, x)$ 에 존재한다. 위

의 식을 정리하면

$$f(x) - f(0) = xf'(y)$$

이다. 이때 $y < x$ 이므로 조건 (4)에 의해 $f'(y) < f'(x)$ 이다. 조건 (3)에 의해 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = f(x) - f(0) = xf'(y) < xf'(x)$ 이다. 따라서 $xf'(x) - f(x) > 0$ 이므로 $g'(x) > 0$ 이다. 그러므로 $g(x)$ 는 $x > 0$ 에서 증가한다.

■ 1-3(a)

$S_n = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) + \ln(1+x^4) + \dots + \ln(1+x^{2^{n-1}})$ 으로 두자.

$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 가 수렴하도록 하는 실수 x 의 값의 범위를 구하면 된다.

$$\begin{aligned} S_n &= \ln(1+x) + \ln(1+x^2) + \ln(1+x^4) + \dots + \ln(1+x^{2^{n-1}}) \\ &= \ln(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^{n-1}}) \\ &= \ln(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2^n-1}) \end{aligned}$$

그리고 $T_n = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2^n-1}$ 이라고 하자.

$$T_n = \begin{cases} \frac{1-x^{2^n}}{1-x} & (x \neq 1) \\ 2^n & (x = 1) \end{cases}$$

이로부터 $|x| < 1$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{1-x}$ 가 성립한다. 그러므로 $|x| < 1$ 에 대하여 S 가 수렴한다.

별해: 제시문 <다>에서 주어진 풀이를 이용하여 다음과 같이 답을 구할 수도 있다. 제시문 <다>에서 주어진 식

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{x^{2^{n-2}}}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^{2^{n-1}}}\right)$$

에 $x = \frac{1}{t}$ 을 대입하면

$$\ln(1-t)(1+t)(1+t^2)(1+t^4) \dots (1+t^{2^{n-2}}) = \ln(1-t^{2^{n-1}})$$

을 얻는다. 따라서

$$\ln(1+t)(1+t^2)(1+t^4) \dots (1+t^{2^{n-2}}) = \ln(1-t^{2^{n-1}}) - \ln(1-t)$$

이다. 그러므로 제시문 <다>의 결과를 이용하면 $|t| < 1$ 에 대하여 주어진 급수가 수렴한다.

■ 1-3(b)

1-3(a)의 풀이에서 $|x| < 1$ 에 대하여

$f(x) = -\ln(1-x)$ 임을 얻는다.

$$f(x) = -\ln(1-x) \quad (|x| < 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} > 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

을 만족시킨다. 또한 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$ 이므로

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽의 그림과 같다.

별해: $f(x) = -\ln(1-x)$ 의 그래프는 $y = \ln x$ 의 그래프의 대칭성을 이용하여 미분을 이용하지 않고 그릴 수도 있다

