2021학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수 답안
- 자 연 계 열 문 항 -

■ 1-1(a)

$n=p^k$이면 양의 약수의 총합은 $1+p+p^2+\cdots+p^k=\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}$이다.

n이 완전수라 가정하면 $\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}=2n=2p^k$이다.

따라서 $p^{k+1}-1=2p^{k+1}-2p^k$, 즉 $p^k(p-2)=-1$이다. 이때 $p=2$이면 $0=-1$이므로 모순이고, $p>2$이면 k는 자연수이므로 좌변은 p의 배수이나 우변은 p의 배수가 아니므로 모순이다. 그러므로 n은 완전수가 될 수 없다.

■ 1-1(b)

m이 홀수이므로 n의 양의 약수들은 m의 양의 약수를 1배, 2배, 4배, 8배한 수이다. 따라서 m의 양의 약수의 총합을 $f(m)$이라 하면 n의 양의 약수의 총합은 $(1+2+4+8)f(m)=15f(m)$이다. 따라서 n이 완전수라면 $15f(m)=16m$을 만족시킨다. 그러므로 m은 15의 배수이다. $m=15k$로 두면 $f(m)=16k$이다. 여기서 $k\ge 1$이므로 k, $3k$, $5k$, $15k$가 모두 서로 다른 m의 양의 약수이고 $f(m)\ge k+3k+5k+15k$가 되어 모순이다. 따라서 n은 완전수가 아니다.
이므로 $f(x)=f(x)-f(0)=xf'(y)<xf'(x)$이다. 따라서 $xf'(x)-f(x)>0$이므로 $g'(x)>0$이다. 그러므로 $g(x)$는 $x>0$에서 증가한다.

2021학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수 답안
- 자 연 계 열 문 항 -

■ 1-2(a)

함수 $f(x)$가 조건 (1)과 (2)를 만족시키므로 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(x)$가 되는 x가 열린구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재한다. 조건 (3)에 의하여

$$f(1)=f(1)-f(0)=f'(x)$$

이다. 그러므로 $f'(x)=f(1)$가 되는 x가 존재한다.

■ 1-2(b)

$g(x)$가 $x>0$에서 증가함을 보이기 위하여 $x>0$일 때 $g'(x)>0$임을 보이면 된다. $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$이고 $x^2>0$이므로 $xf'(x)-f(x)>0$이면 $g'(x)>0$이다. 따라서 $g'(x)>0$을 보이기 위하여 $x>0$일 때 $xf'(x)-f(x)>0$을 보이면 된다. 함수 $f(x)$가 조건 (1)과 (2)를 만족시키므로 닫힌구간 $[0,x]$에서 연속이고 열린구간 $(0,x)$에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(y)$가 되는 y가 열린구간 $(0,x)$에 존재한다. 위의 식을 정리하면

$$f(x)-f(0)=xf'(y)$$

이다. 이때 $y<x$이므로 조건 (4)에 의해 $f'(y)<f'(x)$이다. 조건 (3)에 의해 $f(0)=0$이므로 $f(x)=f(x)-f(0)=xf'(y)<xf'(x)$이다. 따라서 $xf'(x)-f(x)>0$이므로 $g'(x)>0$이다. 그러므로 $g(x)$는 $x>0$에서 증가한다.

2021학년도 숙명여자대학교 모의논술 우수 답안
- 자 연 계 열 문 항 -

■ 1-3(a)

$S_n = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) + \ln(1+x^4) + \cdots + \ln(1+x^{2^{n-1}})$으로 두자.

$S = \lim_{n\to\infty} S_n$가 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하면 된다.

$$\begin{aligned} S_n &= \ln(1+x) + \ln(1+x^2) + \ln(1+x^4) + \cdots + \ln(1+x^{2^{n-1}}) \\ &= \ln(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}}) \\ &= \ln(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2^n-1}) \end{aligned}$$

그리고 $T_n = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2^n-1}$이라고 하자.

$$T_n = \begin{cases} \dfrac{1-x^{2^n}}{1-x} & (x \neq 1) \\ 2^n & (x=1) \end{cases}$$

이로부터 $|x|<1$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} T_n = \dfrac{1}{1-x}$가 성립한다. 그러므로 $|x|<1$에 대하여 S가 수렴한다.

별해: 제시문 <다>에서 주어진 풀이를 이용하여 다음과 같이 답을 구할 수도 있다. 제시문 <다>에서 주어진 식

$$\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^{2^{n-2}}}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{x^{2^{n-1}}}\right)$$

에 $x=\dfrac{1}{t}$을 대입하면

$$\ln(1-t)(1+t)(1+t^2)(1+t^4)\cdots\left(1+t^{2^{n-2}}\right) = \ln\left(1-t^{2^{n-1}}\right)$$

을 얻는다. 따라서

$$\ln(1+t)(1+t^2)(1+t^4)\cdots\left(1+t^{2^{n-2}}\right) = \ln\left(1-t^{2^{n-1}}\right) - \ln(1-t)$$

이다. 그러므로 제시문 <다>의 결과를 이용하면 $|t|<1$에 대하여 주어진 급수가 수렴한다.

■ 1-3(b)

1-3(a)의 풀이에서 $|x|<1$에 대하여 $f(x) = -\ln(1-x)$임을 얻는다.

$$f(x) = -\ln(1-x) \quad (|x|<1)$$
$$f'(x) = \frac{1}{1-x} > 0$$
$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

을 만족시킨다. 또한 $\lim_{x\to 1-} f(x) = \infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 아래의 그림과 같다.

별해: $f(x) = -\ln(1-x)$의 그래프는 $y = \ln x$의 그래프의 대칭성을 이용하여 미분을 이용하지 않고 그릴 수도 있다.