<수리계열(수학)>

[숙명여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2021학년도 수시모집 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1-1(a), 1-1(b), 1-2(a), 1-2(b), 1-3(a), 1-3(b)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수, 수학적 귀납법, 평균값 정리, 부정적분, 방정식과 부등식, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 함수의 그래프와 그 활용, 사잇값의 정리
예상 소요 시간	110분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

<가>

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> ㉠ 어떤 실수 x에 대하여 $f(x) \neq 0$이다.
> ㉡ 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$이다.

이때 함수 $f(x)$는 임의의 자연수 n에 대하여

$$f(nx)=nf(x)$$

이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> ㉢ 어떤 실수 x에 대하여 $g(x) \neq 0$이다.
> ㉣ 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $g(x+y)=g(x)g(y)$이다.

이때 함수 $g(x)$는 임의의 자연수 n에 대하여

$$g(nx)=\{g(x)\}^n \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

모든 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> ㉤ 어떤 양의 실수 x에 대하여 $h(x) \neq 0$이다.
> ㉥ 임의의 양의 두 실수 x, y에 대하여 $h(xy)=h(x)h(y)$이다.

이때 $h(x_0) \neq 0$을 만족시키는 양의 실수 x_0이 존재하고, 임의의 양의 실수 x에 대하여

$$h(x_0) = h\left(x \cdot \frac{x_0}{x}\right) = h(x)h\left(\frac{x_0}{x}\right)$$

이므로 $h(x) \neq 0$이다. 한편, 양의 실수 a에 대하여 $k(x) = \ln\{h(a^x)\}$이라 하면

$$k(x+y) = k(x) + k(y)$$

이다.

<나>

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 평균값 정리에 의하면 $a < b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 이러한 실수 c가 닫힌구간 $[a, b]$의 중점이 되는 함수 $f(x)$에 대하여 알아보자. 이제 임의의 서로 다른 두 실수 x, y에 대하여

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad f'(0) = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

이라고 가정하자. 위의 등식 ②에서 $y = -x$이면

$$\frac{f(x)-f(-x)}{x-(-x)} = f'(0) = 0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $f(-x) = f(x)$를 만족시킨다.

(i) $x \neq 0$이면,

$$f'(3x) = f'\left(\frac{4x+2x}{2}\right) = \frac{f(4x)-f(2x)}{4x-2x} = \frac{f(4x)-f(2x)}{2x}$$

이다. 한편,

$$f'(x) = f'\left(\frac{4x+(-2x)}{2}\right) = \frac{f(4x)-f(-2x)}{4x-(-2x)} = \frac{f(4x)-f(2x)}{6x}$$

이므로

$$3f'(x) = f'(3x)$$

이다.

(ii) $x = 0$이면, ②에 의하여 $f'(0) = 0$이므로

$$3f'(x) = f'(3x) = 0$$

이다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여, 임의의 실수 x에 대하여

$$3f'(x) = f'(3x)$$

이다.

<다>

두 사람 A와 B가 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 계수 a, b, c를 서로 번갈아 가며 실수로 바꾸는 다음과 같은 경기를 한다. 단, c는 0으로 바꿀 수 없다.

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$에서 A가 먼저 세 계수 a, b, c 중 하나를 선택한 후, 그것을 A가 원하는 실수로 바꾼다. 그다음, B는 A가 선택한 것을 제외한 나머지 두 계수 중 하나를 선택한 후, 그것을 B가 원하는 실수로 바꾼다. 마지막으로 A는 위에서 선택하고 남은 계수를 적당한 실수로 바꿔서, 그 결과로 만들어진 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지면 A가 이기고, 그렇지 않으면 B가 이긴다.

예를 들어, A와 B가 다음과 같은 순서로 경기를 한다고 하자.
첫 번째, A는 a를 선택한 후 -6으로 바꾼다.
두 번째, B는 b를 선택한 후 11로 바꾼다.
세 번째, A는 c를 -6으로 바꾼다.
위의 결과로 만들어진 삼차방정식은 $x^3-6x^2+11x-6=0$이 되고, 이 방정식은 서로 다른 세 실근 1, 2, 3을 가진다. 그러므로 A가 이긴다.

1-1. 제시문 **<가>**를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1(a). 수학적 귀납법을 이용하여 등식 ①이 성립함을 보이시오. 또한 임의의 실수 x에 대하여 $g(x)$는 양의 실수임을 보이시오.

1-1(b). 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $p(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

1) 어떤 실수 x에 대하여 $p(x)\neq -1$이다.
2) 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $p(x+y)=p(x)+p(y)+p(x)p(y)$이다.

이때 $p(2021x)+1=\{p(x)+1\}^{2021}$임을 보이시오.

1-2. 제시문 **<나>**에서 ②를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 다음 문제에 답하시오.

1-2(a). 임의의 두 실수 k, x에 대하여 $kf'(x)=f'(kx)$임을 보이시오.

1-2(b). 문제 1-2(a)를 이용하여 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$과 $f'(2)=4$를 만족시킬 때, $f(x)$를 구하시오.

1-3. 제시문 **<다>**에서 주어진 경기에 대하여 다음 문제에 답하시오.

1-3(a). 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$에서 A가 먼저 a를 선택하여 6으로 바꾼 후, B가 b를 선택하여 9로 바꾸어 삼차방정식 $x^3+6x^2+9x+c=0$이 되었다. 이 삼차방정식에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 실수 c의 범위를 구하시오.

> 1) 열린구간 $(-5, -3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
> 2) A가 이 경기에서 이긴다.

1-3(b). 제시문 **<다>**에서 주어진 경기는 B의 선택에 상관없이 A가 이길 수 있음을 보이시오. (도움말: A는 첫 번째 순서에서 c를 선택한 후 1로 바꿀 수 있다. 사잇값의 정리와 그래프의 개형을 이용할 수 있다.)

3. 출제 의도

함수, 수학적 귀납법, 평균값 정리, 부정적분, 방정식과 부등식, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 함수의 그래프와 그 활용, 사잇값의 정리 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 수학적 귀납법, 함수의 활용, 평균값 정리, 부정적분, 사잇값의 정리, 함수의 그래프에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 1	교육과정*	[수학 Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{3}$ 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. [수학] - (3) 수와 연산 - $\boxed{2}$ 명제 [10수학03-04] 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.
	성취기준·성취수준**	[수학 Ⅰ] - (3) 수열 - (다) 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. [수학] - (3) 수와 연산 - (나) 명제 [10수학03-04] 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.
제시문 2	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 3	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-1	교육과정	[수학 Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{3}$ 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. [수학] - (3) 수와 연산 - $\boxed{2}$ 명제 [10수학03-04] 명제와 조건의 뜻을 알고, '모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해한다. [수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수 [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학 Ⅰ] - (3) 수열 - (다) 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. [수학] - (3) 수와 연산 - (나) 명제 [10수학03-04] 명제와 조건의 뜻을 알고, '모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해한다. [수학] - (4) 함수 - (가) 함수 [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
문제 1-2	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [수학Ⅱ] - (3) 적분 - $\boxed{1}$ 부정적분 [12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [수학Ⅱ] - (3) 적분 - (가) 부정적분 [12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
문제 1-3	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호[별책 8] "수학과 교육과정"

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외	좋은책신사고	2020	208-224 73-99 183-192
	수학	류희찬 외	천재교과서	2020	216-227 75-78 91-101 184-191
	수학I	홍성복 외	지학사	2020	148-157 10-59
	수학I	배종숙 외	금성출판사	2020	152-166 40-66
	수학II	이준열 외	천재교육	2020	29-43 73-105 114-130
	수학II	홍성복 외	지학사	2020	30-45 74-105 112-123
	미적분	홍성복 외	지학사	2020	110-131
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2020	97-117
기타					

1) 교과서 외 자료를 활용한 경우, 관련 자료별로 교과서 근거를 작성.

5. 문항 해설

제시문 <가>에서는 실수 전체의 집합 또는 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 어떤 성질을 만족시키는 함수들을 소개한다. <문제 1-1(a) 1-1(b)>에서는 제시문 <가>에서 소개된 함수들의 이해를 바탕으로 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는지를 평가한다. 또한 '모든', '어떤'을 포함한 명제, 제시문에서 소개된 함수의 성질을 이용하는 명제를 증명할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <나>에서는 주어진 구간에서 평균변화율과 순간변화율이 같은 점이 그 구간의 중점이 되는 함수에 대하여 알아본다. <문제 1-2(a)>에서는 제시문 <나>에서 주어진 함수를 바르게 이해하고 이를 이용하여 이 함수와 관련된 성질을 증명할 수 있는지를 평가한다. <문제 1-2(b)>에서는 문제에서 주어진 성질을 만족시키는 함수를 부정적분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>에서는 두 사람이 삼차방정식의 세 계수를 서로 번갈아 가며 실수로 바꾸는 경기를 소개한다. <문제 1-3(a)>에서 삼차다항식의 증가와 감소, 극대와 극소를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. <문제 1-3(b)>에서는 삼차함수의 그래프의 개형을 이용하여 주어진 경기에서의 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 수 있다는 것을 보일 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 문제 <1-1(a)>, <1-1(b)>

1. 제시문 <가>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <가>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <1-1(a)>에서 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 보인다.
4. <1-1(a)>에서 임의의 실수 x에 대하여 $g(x)$는 양의 실수임을 보인다.
5. <1-1(b)>에서 $u(x)=p(x)+1$로 치환한다.
6. <1-1(b)>에서 $u(nx)=\{u(x)\}^n$임을 논리적으로 보인다.

▶ 문제 <1-2(a)>, <1-2(b)>

1. 제시문 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <1-2(a)>에서 $x \neq 0$이고 $k \neq 0$인 경우, $kf'(x)=f'(kx)$가 성립함을 보인다.
4. <1-2(a)>에서 $x=0$인 경우와 $k=0$인 경우, $kf'(x)=f'(kx)$가 성립함을 보인다.
5. <1-2(b)>에서 $f'(x)=2x$임을 보인다.
6. <1-2(b)>에서 $f(x)=x^2$임을 보인다.

▶ 문제 <1-3(a)>, <1-3(b)>

1. 제시문 <다>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <다>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <1-3(a)>에서 열린구간 $(-5,-3)$에서 적어도 하나의 실근을 가지는 c의 범위를 구한다.
4. <1-3(a)>에서 주어진 경기에서의 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지는 c의 범위를 구한다.
5. <1-3(b)>에서 사잇값의 정리를 이용하여 적당한 구간에서 적어도 하나의 실근이 존재함을 보인다.
6. <1-3(b)>에서 그래프의 개형을 이용하여 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 수 있음을 보인다.

■ 각 세부 문제별로 다음의 기준으로 채점한다.

1 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 정확하게 충족시키고, 3-6의 요건 중 3가지를 만족하는 경우
4 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하는 경우
5 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하나 논리 전개 및 계산이 다소 미흡한 경우

6 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 1가지를 만족하는 경우
7 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지만, 3-6의 요건을 충족시키지 못한 경우
8 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지 않은 경우
9 등급: 위의 6가지 기준을 대부분 충족시키지 못한 경우

7. 예시 답안

■ 1-1(a)

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=g(x)$, (우변)$=g(x)$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 등식 ①이 성립한다고 가정하면 $g(kx)=\{g(x)\}^k$이다. 이때

$$g((k+1)x)=g(kx+x)=g(kx)g(x)=\{g(x)\}^k g(x)=\{g(x)\}^{k+1}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 등식 ①은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 등식 ①은 성립한다.

조건 ㉢에 의하여 $g(x_0)\neq 0$인 실수 x_0이 존재한다. 이때 임의의 실수 x에 대하여

$$g(x_0)=g(x+(x_0-x))=g(x)g(x_0-x)$$

이므로 $g(x)\neq 0$이다. 임의의 실수 x에 대하여

$$g(x)=g\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left\{g\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2 \geq 0$$

이다. 한편, $g(x)\neq 0$이므로 $g(x)>0$이다.

■ 1-1(b)

$u(x)=p(x)+1$이라 하면

$$u(x+y)=p(x+y)+1=p(x)+p(y)+p(x)p(y)+1$$

$$=(p(x)+1)(p(y)+1)=u(x)u(y)$$

이다. 어떤 실수 x_0에 대하여 $p(x_0)\neq -1$이므로 $u(x_0)\neq 0$이다. 따라서 등식 ①에 의하여

$$u(2021x)=\{u(x)\}^{2021}$$

이다. 즉,

$$p(2021x)+1=\{p(x)+1\}^{2021}$$

이다.

■ 1-2(a)

(i) $x\neq 0$이고 $k\neq 0$인 경우,

$$f'(kx) = f'\left(\frac{(k+1)x + (k-1)x}{2}\right)$$

$$= \frac{f((k+1)x) - f((k-1)x)}{(k+1)x - (k-1)x}$$

$$= \frac{f((k+1)x) - f((k-1)x)}{2x}$$

이고

$$f'(x) = f'\left(\frac{(k+1)x + (1-k)x}{2}\right)$$

$$= \frac{f((k+1)x) - f((1-k)x)}{(k+1)x - (1-k)x}$$

$$= \frac{f((k+1)x) - f(-(k-1)x)}{2kx}$$

$$= \frac{f((k+1)x) - f((k-1)x)}{2kx}$$

이다. 따라서 $kf'(x) = f'(kx)$가 성립한다.

(ii) $x=0$인 경우,

$$kf'(0) = f'(k \cdot 0) = f'(0) = 0$$

이므로 $kf'(x) = f'(kx)$가 성립한다.

(iii) $k=0$인 경우, $0 = f'(0)$이므로 $kf'(x) = f'(kx)$가 성립한다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 임의의 두 실수 k, x에 대하여 $kf'(x) = f'(kx)$가 성립한다.

■ 1-2(b)

$$f'(x) = f'\left(\frac{x}{2} \cdot 2\right) = \frac{x}{2} f'(2) = \frac{x}{2} \cdot 4 = 2x$$

이므로

$$f(x) = x^2 + C \quad (\text{단, } C\text{는 상수이다.})$$

이다. 한편, $f(0) = 0$이므로 $f(x) = x^2$이다.

■ 1-3(a)

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + c$라 하자. A가 경기에서 이기기 위한 c의 범위를 구해보자. 방정식 $f(x) = 0$이 서로 다른 세 개의 실근을 가져야 하므로 함수 $f(x)$의 극값들의 부호가 달라야 한다. 먼저

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+1)(x+3) = 0$$

을 풀면 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값, $x=-1$에서 극솟값을 가진다는 것을 알 수 있고, 서로 다른 세 개의 실근을 가지기 위하여

$$f(-1) = c - 4 < 0, \quad f(-3) = c > 0$$

임을 알 수 있다. 그러므로

$0 < c < 4$ ……①

이다. 또한,

(i) 극솟값 $f(-1) < 0$이고 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$이므로 $f(x)$는 열린구간 $(-1, \infty)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $f(-3)f(-1) < 0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(-3, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(iii) 극댓값 $f(-3) > 0$이고 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$이므로 열린구간 $(-\infty, -3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

열린구간 $(-5, -3)$에서 적어도 하나의 실근을 가져야 하므로 (i), (ii), (iii)에 의하여 열린구간 $(-5, -3)$에서 단 하나의 실근을 갖는다. 따라서

$$f(-3)f(-5) = c(c-20) < 0$$

을 만족시켜야 한다. 그러므로 c의 범위는

$0 < c < 20$ ……②

이다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$이 열린구간 $(-5, -3)$에서 적어도 하나의 실근을 가지며 A가 이기기 위한 c의 범위는 ①과 ②를 동시에 만족시켜야 하므로 $0 < c < 4$이다.

■ 1-3(b)

첫 번째, A는 c를 선택한 후에 1로 바꾼다. 두 번째, B는 a 또는 b 중 하나를 선택한 후 그것을 어떤 실수로 바꾼다. 세 번째, A는 B가 바꾼 계수와 남은 계수의 합이 -3이 되도록 남은 계수를 바꾼다.

위의 결과로 만들어진 삼차방정식은 다음과 같다.

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0, \quad a + b = -3$$

이 삼차방정식은 서로 다른 세 실근을 가진다. 그 이유는 다음과 같다.

(i) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$$f(0) = 1 > 0\text{이고 } f(1) = 1 + a + b + 1 = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$$

이므로, 사잇값의 정리에 의하여 $f(k) = 0$인 k가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

(ii) $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to -\infty$이고 $f(0) = 1 > 0$이므로 $f(l) = 0$인 실근 l이 열린구간 $(-\infty, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

(iii) $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$이고 $f(1) = -1 < 0$이므로 $f(m) = 0$인 실근 m이 열린구간 $(1, \infty)$에 적어도 하나 존재한다.

그러므로 방정식 $f(x) = 0$은 (i), (ii), (iii)에 의하여 서로 다른 세 실근을 갖는다. 따라서 A가 경기에서 이긴다.