계 열 문 항

<가>

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> ㉠ 어떤 실수 x에 대하여 $f(x) \neq 0$이다.
> ㉡ 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$이다.

이때 함수 $f(x)$는 임의의 자연수 n에 대하여

$$f(nx) = nf(x)$$

이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> ㉢ 어떤 실수 x에 대하여 $g(x) \neq 0$이다.
> ㉣ 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $g(x+y) = g(x)g(y)$이다.

이때 함수 $g(x)$는 임의의 자연수 n에 대하여

$$g(nx) = \{g(x)\}^n \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

모든 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> ㉤ 어떤 양의 실수 x에 대하여 $h(x) \neq 0$이다.
> ㉥ 임의의 양의 두 실수 x, y에 대하여 $h(xy) = h(x)h(y)$이다.

이때 $h(x_0) \neq 0$을 만족시키는 양의 실수 x_0이 존재하고, 임의의 양의 실수 x에 대하여

$$h(x_0) = h\left(x \cdot \frac{x_0}{x}\right) = h(x)h\left(\frac{x_0}{x}\right)$$

이므로 $h(x) \neq 0$이다. 한편, 양의 실수 a에 대하여 $k(x) = \ln\{h(a^x)\}$이라 하면

$$k(x+y) = k(x) + k(y)$$

이다.

<나>

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 평균값 정리에 의하면 $a < b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 이러한 실수 c가 닫힌구간 $[a, b]$의 중점이 되는 함수 $f(x)$에 대하여 알아보자. 이제 임의의 서로 다른 두 실수 x, y에 대하여

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad f'(0) = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

이라고 가정하자. 위의 등식 ②에서 $y=-x$이면

$$\frac{f(x)-f(-x)}{x-(-x)}=f'(0)=0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $f(-x)=f(x)$를 만족시킨다.

(i) $x \neq 0$이면,

$$f'(3x)=f'\left(\frac{4x+2x}{2}\right)=\frac{f(4x)-f(2x)}{4x-2x}=\frac{f(4x)-f(2x)}{2x}$$

이다. 한편,

$$f'(x)=f'\left(\frac{4x+(-2x)}{2}\right)=\frac{f(4x)-f(-2x)}{4x-(-2x)}=\frac{f(4x)-f(2x)}{6x}$$

이므로

$$3f'(x)=f'(3x)$$

이다.

(ii) $x=0$이면, ②에 의하여 $f'(0)=0$이므로

$$3f'(x)=f'(3x)=0$$

이다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여, 임의의 실수 x에 대하여

$$3f'(x)=f'(3x)$$

이다.

<다>

두 사람 A와 B가 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 계수 a, b, c를 서로 번갈아 가며 실수로 바꾸는 다음과 같은 경기를 한다. 단, c는 0으로 바꿀 수 없다.

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$에서 A가 먼저 세 계수 a, b, c 중 하나를 선택한 후, 그것을 A가 원하는 실수로 바꾼다. 그다음, B는 A가 선택한 것을 제외한 나머지 두 계수 중 하나를 선택한 후, 그것을 B가 원하는 실수로 바꾼다. 마지막으로 A는 위에서 선택하고 남은 계수를 적당한 실수로 바꿔서, 그 결과로 만들어진 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지면 A가 이기고, 그렇지 않으면 B가 이긴다.

예를 들어, A와 B가 다음과 같은 순서로 경기를 한다고 하자.

첫 번째, A는 a를 선택한 후 -6으로 바꾼다.

두 번째, B는 b를 선택한 후 11로 바꾼다.

세 번째, A는 c를 -6으로 바꾼다.

위의 결과로 만들어진 삼차방정식은 $x^3-6x^2+11x-6=0$이 되고, 이 방정식은 서로 다른 세 실근 1, 2, 3을 가진다. 그러므로 A가 이긴다.

1-1. 제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1(a). 수학적 귀납법을 이용하여 등식 ①이 성립함을 보이시오. 또한 임의의 실수 x에 대하여 $g(x)$는 양의 실수임을 보이시오.

1-1(b). 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $p(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

1) 어떤 실수 x에 대하여 $p(x) \neq -1$이다. 2) 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $p(x+y) = p(x) + p(y) + p(x)p(y)$이다.

이때 $p(2021x) + 1 = \{p(x)+1\}^{2021}$임을 보이시오.

1-2. 제시문 <나>에서 ②를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 다음 문제에 답하시오.

1-2(a). 임의의 두 실수 k, x에 대하여 $kf'(x) = f'(kx)$임을 보이시오.

1-2(b). 문제 1-2(a)를 이용하여 함수 $f(x)$가 $f(0) = 0$과 $f'(2) = 4$를 만족시킬 때, $f(x)$를 구하시오.

1-3. 제시문 <다>에서 주어진 경기에 대하여 다음 문제에 답하시오.

1-3(a). 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$에서 A가 먼저 a를 선택하여 6으로 바꾼 후, B가 b를 선택하여 9로 바꾸어 삼차방정식 $x^3 + 6x^2 + 9x + c = 0$이 되었다. 이 삼차방정식에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 실수 c의 범위를 구하시오.

1) 열린구간 $(-5, -3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 2) A가 이 경기에서 이긴다.

1-3(b). 제시문 <다>에서 주어진 경기는 B의 선택에 상관없이 A가 이길 수 있음을 보이시오. (도움말: A는 첫 번째 순서에서 c를 선택한 후 1로 바꿀 수 있다. 사잇값의 정리와 그래프의 개형을 이용할 수 있다.)